Skript zur Vorlesung

Analysis I

Marburg, Wintersemester 1999/2000

Friedrich W. Knöller

Literaturverzeichnis

[1] Barner, Martin und Flohr, Friedrich: Analysis I. de Gruyter. 19XX

[2] Forster, Otto: Analysis 1. Vieweg. 1999

[3] Lang, Serge: Analysis I. Addison-Wesley. 1968
ergänzend

[4] Dieudonné, Jean: Foundations of Modern Analysis. Academic Press. 1960

[5] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1. Teubner. 19XX

[6] Spivak, Michael: Calculus. Benjamin. 19XX

Kapitel 0

Grundlagen

0.0 Mengen und Abbildungen

Weite Teile der Mathematik basieren auf dem Begriff der **Menge**, so auch die Analysis. Allerdings ist es ausgesprochen schwierig, genau zu sagen, was eine Menge im streng–mathematischen Sinne ist. Hilfreich ist die naive Vorstellung davon, was eine Menge ist, etwa im Sinne **Georg Cantors** (1845-1918) – des Schöpfers der Mengenlehre –, für den eine Menge eine „Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte des Denkens – den sogenannten Elementen der Menge – zu einem Ganzen“ ist. Fasst man beispielsweise[1] die Zahlen 25/10/99

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

zusammen, so erhält man die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Präziser ist der semi-axiomatische Zugang, bei dem die Begriffe „Menge“ und „Element von“ undefiniert bleiben – ähnlich wie „Punkt“ und „Gerade“ in der Geometrie – und bei dem durch gewisse Prinzipien – Spielregeln gewissermaßen – festgelegt wird, wie mit den Begriffen „Menge“ und „Element von “ zu verfahren ist. Dabei sind die als Elemente einer Menge auftretenden Objekte selbst als Mengen (im mathematischen Sinne) anzusehen.

Ist die Menge a Element der Menge X, so schreibt man dafür $a \in X$ und sagt auch, dass a in X liegt oder dass a zu X gehört. Gehört a nicht zu X, so schreibt man $a \notin X$, etwa $-1 \notin \mathbb{N}$.

[1]lediglich in den Beispielen der Abschnitte 0.0 und teilweise 0.1 wird auf Schulwissen zurückgegriffen.

(EXTENSIONSPRINZIP)

Die Mengen X und Y sind gleich genau dann, wenn sie die selben Elemente haben.

Man kennt also eine Menge, wenn man deren Elemente kennt.

EX(ample):

$$\{1,5,8\} = \{1,8,5\} = \{1,1,5,8\} \text{ aber } \{1,2,3\} \neq \{3,2,1,4\}$$

Definition 0.0.0 (Teilmenge) *Seien X, Y Mengen. X ist eine Teilmenge von Y $:\Leftrightarrow$ Jedes Element von X liegt auch in Y.*

Ist X Teilmenge von Y, so schreibt man dafür $X \subset Y$. Beispielsweise ist

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

wobei $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ die Menge der ganzen Zahlen ist.

Rechenregeln

(1) $X \subset X$ (Reflexivität)

(2) $X \subset Y, Y \subset X \Rightarrow X = Y$ (Antisymmetrie)

(3) $X \subset Y, Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$ (Transitivität)

Durch Spezifizieren oder Ausssondern kann man aus einer Menge X neue Mengen gewinnen. Dazu sei E eine Eigenschaft, die die Elemente von X haben können (oder auch nicht) und die mit Hilfe von

$$=,\ \in,\ \text{nicht, oder, und},\ \Rightarrow, \Leftrightarrow,\ \text{für alle} \ldots \text{ gilt, es gibt} \ldots \text{ mit}$$

formulierbar ist.

Beispielsweise ist die Eigenschaft, dass 2 die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ teilt, gleichbedeutend damit, dass es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2 \cdot m$.

(SPEZIFIKATIONSPRINZIP)

Zu einer Menge X und einer Eigenschaft E gibt es eine Menge X_E so dass $x \in X_E \Leftrightarrow x \in X$ und x hat die Eigenschaft E.

Bemerkung 0.0.1 *Nach dem Extensionsprinzip ist diese Menge X_E durch X und E 1-deutig bestimmt, sie wird mit*

$$\{x \in X \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

bezeichnet. Sie ist eine Teilmenge von X.

Beispielsweise ist

$$2 \cdot \mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ teilt } n\} \subset \mathbb{Z}$$

die Menge der geraden Zahlen.

Satz 0.0.2 (leere Menge) *Es gibt genau eine Menge $\emptyset$ - die sogenannte leere Menge - so dass $\emptyset \subset X$ für jede Menge X.*

Beweis: Eindeutigkeit: Sind ϕ, ϕ' zwei derartige Mengen, so ist $\phi \subset \phi'$ und $\phi' \subset \phi$, also $\phi = \phi'$
Existenz[2]: Sei M irgendeine Menge. Dann ist $\phi_M := \{x \in M \mid x \neq x\}$ eine Menge nach **(SPEZ)**. Diese Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge X. Wäre nämlich $\phi_M \not\subset Y$ für eine Menge Y, so existierte ein $x \in \phi_M$, so dass $x \notin Y$. Da $x \in \phi_M$, ist $x \neq x$, ein Widerspruch. □

Auf ähnliche Weise sieht man, dass es nicht die

„Menge aller Mengen“

geben kann:

Satz 0.0.3 *Zu jeder Menge X gibt es eine Menge Y, so dass $Y \notin X$.*

Beweis: Nach **(SPEZ)** ist $Y := \{a \in X \mid a \notin a\}$ eine Menge. Angenommen $Y \in X$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: $Y \in Y$ oder $Y \notin Y$. Ist $Y \in Y$ so ist, da $Y \in X$, $Y \notin Y$, Ist $Y \notin Y$ so ist, da $Y \in X$, $Y \in Y$, in beiden Fällen ein Widerspruch. Deshalb ist $Y \notin X$. □

Der Beweis ist die mathematische Form der Russel'schen Antinomie[3]:

> „Der Dorfbarbier rasiert alle Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert den Dorfbarbier?“

Weniger verblüffend sind die folgenden Bildungen:

Definition 0.0.4 *Seien $A, B \subset X$*

(1) $A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

(2) $A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

[2]Es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass es überhaupt Mengen (im mathematischen Sinne) gibt.
[3]Bertrand Russel (1872-1970), engl. Mathematiker

(3) $\complement_X A := \{x \in X \mid x \notin A\}$.

$A \cap B$ ist der Durchschnitt, $A \cup B$ die Vereinigung der Mengen A, B; $\complement_X A$ ist das Komplement von A in X, das manchmal auch mit $X \setminus A$ bezeichnet wird.

EX: $2 \cdot \mathbb{Z} \cap 3 \cdot \mathbb{Z} = 6 \cdot \mathbb{Z}$.

Rechenregeln

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(3) $\complement_X(\complement_X A) = A)$

(4) $\complement_X(A \cap B) = \complement_X A \ \cup \ \complement_X B$

(5) $\complement_X(A \cup B) = \complement_X A \ \cap \ \complement_X B$

Beweis: Vorlesung Lineare Algebra bzw. Übungen.

(4) und (5) sind die sogenannten de Morganschen[4] Regeln.

Unser nächstes Ziel ist, genau zu sagen, was wir unter einer Abbildung oder Funktion verstehen wollen. Der Weg dahin ist allerdings noch weit. 27/10/99

(PAARUNGSPRINZIP)

Zu Mengen A, B gibt es eine Menge $M_{A,B}$, so dass $x \in M_{A,B} \Leftrightarrow x = A$ oder $x = B$.

Zwei Mengen A, B kann man also zu einer neuen Menge, deren Elemente gerade A und B sind, zusammenfassen. Nach **(EXT)** ist $M_{A,B}$ durch A, B 1-deutig bestimmt; man schreibt dafür

$$\{A, B\}.$$

Ist $A = B$, so schreibt man einfach

$$\{A\}.$$

(VEREINIGUNGSPRINZIP)

Zu jeder Menge $\mathcal{F}$ von Mengen (=Familie von Mengen) gibt es eine Menge $V_{\mathcal{F}}$, sodass $x \in V_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow$ Es existiert ein $X \in \mathcal{F}$ sodass $x \in X$.

[4] Augustus de Morgan (1806-1871), engl. Mathematiker

Nach **(EXT)** ist $V_{\mathcal{F}}$ wieder durch $\mathcal{F}$ 1-deutig bestimmt; man schreibt dafür auch
$$\bigcup_{X\in\ \mathcal{F}} X.$$
Diese Menge ist die Vereinigung aller Mengen $X \in \mathcal{F}$.

EX:

A, B Mengen, $\mathcal{F} := \{A, B\}$ nach **(PAAR)**. Es ist
$$\bigcup_{x\in\mathcal{F}} X = A \cup B.$$

Beweis: (Üb) (Beachte die unterschiedlichen Definitionen von $\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$ bzw. $A \cup B$).

Definition 0.0.5 (Tupel) *Sei $a \in A$ und $b \in B$. Dann heißt*
$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$
das Tupel mit der ersten Koordinate a und der zweiten Koordinate b.

Satz 0.0.6 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $(a, b) = (a', b')$

(ii) $a = a',\ b = b'$

Beweis: Übungsaufgabe 1.2

WARNUNG:

$(a, b) \neq \{a, b\}$. Ist z.B. $a \neq b$ so ist $(a, b) \neq (b, a)$ aber $\{a, b\} = \{b, a\}$.

(POTENZPRINZIP)

Zu jeder Menge X gibt es eine Menge PX, so dass $U \in PX \Leftrightarrow U \subset X$.

Die Potenzmenge PX besteht also aus allen Teilmengen von X; nach **(EXT)** ist sie durch X 1-deutig bestimmt.

EX:

[1] $P\ \emptyset = \{\emptyset\}$
[2] $(a, b) \in P(P(A \cup B))$

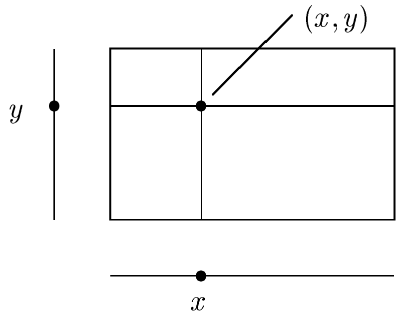
Wir können jetzt zunächst sagen, was das Produkt zweier Mengen ist. 29/10/99

Definition 0.0.7 (Produkt) *Seien X, Y Mengen. Dann heißt*

$$X \times Y := \left\{ z \in P(P(X \cup Y)) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Es gibt ein } x \in X \text{ und ein} \\ y \in Y \text{ so dass } z = (x, y) \end{array} \right\}$$

das (cartesische[5]) Produkt der Menge X mit Y.

Nach**(SPEZ)** ist $X \times Y$ eine Menge, sie besteht aus allen Tupeln (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$

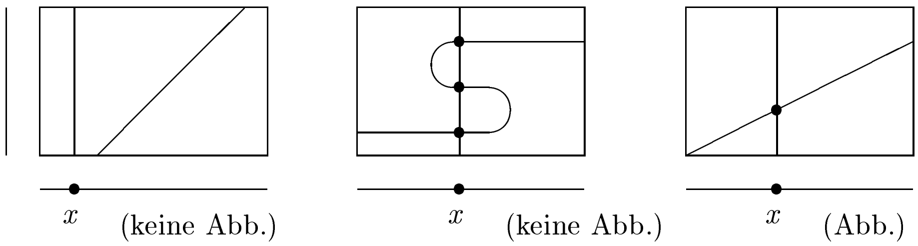


EX: $\emptyset \times X = \emptyset$

Definition 0.0.8 *Sei $f \subset X \times Y$. Dann heißt f Abbildung von X nach Y :⇔*

F1: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f$.

F2: Ist $(x, y) \in f$ und $(x, y') \in f$ so ist $y = y'$.



Ist $f \subset X \times Y$ eine Abbildung und $(x, y) \in f$, so ist y durch x 1-deutig bestimmt; man schreibt deshalb auch $y = f(x)$. Dem Element $x \in X$ wird also durch f 1-deutig das Element $y = f(x)$ „zugeordnet“. Deshalb benutzt man für Abbildungen auch die suggestive Schreibweise:

[5] Réné Descartes (1596-1650), franz. Mathematiker

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x) \text{ oder } \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Uplus & & \Uplus \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

F1 besagt, dass f für jedes $x \in X$ „definiert“ ist

F2 besagt, dass f „wohldefiniert“ ist.

EX:

[1] H = Menge der Hörer der Vorlesung „Analysis I“ im WS 99/00.
$\mu : H \to \mathbb{N}, s \mapsto \mu(s)$ = Matrikelnummer von s.
μ ist eine Abbildung, falls es keine „Schwarzhörer“ gibt und falls die Verwaltung nicht (aus Versehen) an einen Studenten zwei Matrikelnummern vergeben hat.
[2] $f : X \to Y, A \subset X$. Die Abbildung $f|A : A \to X, a \mapsto f(a)$, heißt die Einschränkung von f auf A.
[3] $id_X : X \to X, x \mapsto x$, ist die sogenannte IDENTITÄT auf X.
[4] $Y^X := \{f \in P(X \times Y) \mid f \text{ ist Abbildung}\}$ ist eine Menge nach **(POT)** und **(SPEZ)**. Sie ist die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

Wann sind zwei Abbildungen gleich ?

Lemma 0.0.9 [6] *Sind $f : X \to Y,\ g : X \to Y$ Abbildungen, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f = g$

(ii) $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in X$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $x \in X$. Dann existiert $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f$.
$f = g \Rightarrow (x, y) \in g$. $(x, y) \in f \Rightarrow y = f(x)$, $(x, y) \in g \Rightarrow y = g(x)$, also $f(x) = g(x)$. Da $x \in X$ beliebig, ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $(x, y) \in f \Rightarrow y = f(x) = g(x)$, d.h. $(x, y) \in g$, also $f \subset g$. Analog: $g \subset f$. □

Bezeichnung

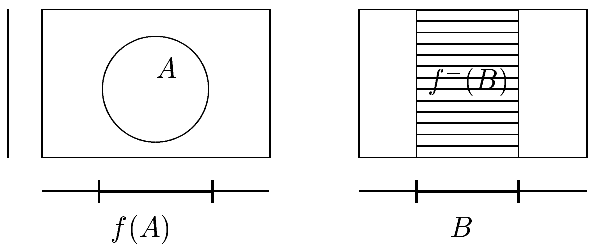
$f : X \to Y$ Abbildung, $A \subset X,\ B \subset Y$

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{y \in Y \mid \text{Es gibt ein } a \in A, \text{ so dass } f(a) = y\} \\ &= \text{Bild von A unter f} \\ f^{-}(B) &:= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ &= \text{Urbild von B unter f} \end{aligned}$$

[6] (=Hilfssatz; manchmal wichtiger als ein Satz)

Speziell: $bild\ f := f(X)$ „Bild von f“
$f^{-}(y) := f^{-}(\{y\})$ „Faser von $y \in Y$“

EX: (Projektion auf die 1. Koordinate) $pr_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$



Definition 0.0.10 $f : X \to Y$ *Abbildung*

(1) f *injektiv:* $\Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$ *für alle* $x, x' \in X, x \neq x'$

(2) f *surjektiv:* $\Leftrightarrow$ *Zu jedem* $y \in Y$ *gibt es ein* $x \in X$ *so dass* $y = f(x)$

(3) f *bijektiv:* $\Leftrightarrow f$ *injektiv und surjektiv.*

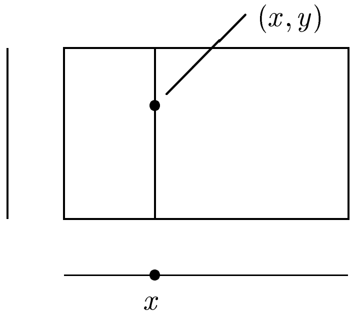
Offenbar ist f surjektiv genau dann, wenn $bild\ f = Y$.

Interpretation: $f : X \to Y$ Abbildung

- injektiv : Für ein $y \in Y$ hat die Gleichung $y = f(x)$ höchstens eine Lösung.
- surjektiv: Für jedes $y \in Y$ hat die Gleichung $y = f(x)$ wenigstens eine Lösung.
- bijektiv: Für jedes $y \in Y$ hat die Gleichung $y = f(x)$ genau eine Lösung.

EX:

[1] $sh : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$. Der „shift“ sh ist injektiv aber nicht surjektiv.
[2] $pr_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$. Die Projektion pr_1 ist surjektiv aber i.a. nicht injektiv.



[3] $sq : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$. Die Quadrierung ist weder injektiv noch surjektiv.

MORAL: Es gibt Abbildungen, die weder injektiv noch surjektiv sind.

Definition 0.0.11 (Komposition) *$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$. Dann heißt*

$$g \circ f := \left\{ (x,z) \in X \times Z \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Es existiert ein } y \in Y \text{ so dass} \\ (x,y) \in f \text{ und } (y,z) \in g \end{array} \right\}$$

die Komposition g nach f.

Bemerkung 0.0.12

(1) $g \circ f : X \to Z$ Abbildung, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (Üb)

(2) Selbst wenn $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert sind, ist im allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{sq} \mathbb{Z} \xrightarrow{sh} \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} sh \circ sq(n) &= n^2 + 1 \\ sq \circ sh(n) &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} sh \circ sq(n) = sq \circ sh(n) \quad &\Leftrightarrow \quad n^2 + 1 = (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad n = 0 \end{aligned}$$

Daher ist

$$sh \circ sq \neq sq \circ sh \quad \text{(nach 0.0.9)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] \arrow[rrr, bend left=50, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rrr, bend right=50, "h \circ (g \circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

$$Ⓢ \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beweis: (Üb)

Theorem 0.0.13 [7] *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung*

äq

(i) f bijektiv

(ii) Es existiert genau eine Abbildung $g : Y \to X$ so dass $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

Bezeichnung

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so heißt die durch f 1-deutig bestimmte Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$ die Umkehrabbildung von f ; sie wird mit f^{-1} bezeichnet.
Ist f bijektiv, so ist auch f^{-1} bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

EX:

Die Abbildung $sh_+ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ ist bijektiv
ebenso wie $sh_- : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n-1$,
und es gilt $sh_- = (sh_+)^{-1}, (sh_-)^{-1} = (sh_+)$

Folgerung 0.0.14 *Sei $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ so dass $\varphi,\ \psi$ bijektiv. Dann ist auch $\psi \circ \varphi$ bijektiv und es gilt $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$.*

Beweis der Folgerung: Ist φ, ψ bijektiv, so existiert φ^{-1}, ψ^{-1} und $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ ist definiert. Nach dem Assoziativgesetz der Komposition ist $(\psi \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) = id_Z$ und $(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi) = id_X$, d.h. $\psi \circ \varphi$ ist bijektiv und $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ wegen der 1-deutigkeit der Umkehrabbildung. $\square$

Beweis des Theorems 0.0.13: $(ii) \Rightarrow (i)$: Da $g \circ f = id_X$, ist $g \circ f$ insbesondere injektiv, also auch f injektiv nach A1.4. Die Surjektivität von f folgt ebenfalls nach A1.4 aus der von $f \circ g = id_Y$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Definiere die Menge g durch $g := \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in f\}$.
g ist überall definiert, also F1, da f surjektiv. g ist wohldefiniert, also F2, da f injektiv, d.h. $g : Y \to X$ ist tatsächlich eine Abbildung. Sei $(x, x') \in g \circ f$. Dann gibt es ein $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f, (y, x') \in g$, also $(x', y) \in f$. Da f injektiv, ist $x = x'$, d.h. $g \circ f \subset id_X$. Sei umgekehrt $(x, x) \in id_X$. Dann gibt es ein $y \in Y$ so dass $(x, y) \in f$, also $(y, x) \in g$ und damit $(x, x) \in g \circ f$, d.h. $id_X \subset g \circ f$, also $g \circ f = id_X$. $f \circ g = id_X$ beweist man analog. $\square$

Ist g eine weitere derartige Abbildung so ist

$$\tilde{g} = id_X \circ \tilde{g} = (g \circ f) \circ \tilde{g} = g \circ (f \circ \tilde{g}) = g \circ id_Y = g.$$

[7](=wichtiger Satz)

EX: $\overline{\mathbb{R}}_+$ Menge der nicht-negativen reellen Zahlen

sq: $\overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto x^2$

$\sqrt{\ }$: $\overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \sqrt{x}$

$sq^{-1} = \sqrt{\ }$