0.1 Reelle Zahlen

Eine Verknüpfung auf $\emptyset \neq G$ ist nichts anderes als eine Abbildung

$$* : G \times G \to G, (x, y) \mapsto x * y$$

Definition 0.1.0 (Gruppe) *(G,*) Gruppe* $:\Leftrightarrow$

G0: $*$ *ist eine Verknüpfung auf* G

G1: $x * (y * z) = (x * y) * z$ *für alle* $x, y, z \in G$

G2: Es gibt ein $e \in G$ *so dass* $e * x = x * e = x$ *für alle* $x \in G$

G3: Zu jedem $x \in G$ *gibt es ein* $x' \in G$ *so dass* $x * x' = x' * x = e$

Ist außerdem

G4: $x * y = y * x$ *für alle* $x, y \in G$ *so heißt* G *abelsche* [8] *Gruppe.*

EX:

[1] $(\mathbb{Z}, +)$ abelsche Gruppe bzgl. $(n, m) \mapsto n + m$.
[2] $\emptyset \neq X, Aut(X) := \{f : X \to X bijektiv\}$
$(Aut(X), \circ)$ Gruppe bzgl. der Komposition $(f, g) \mapsto f \circ g$.
Die Automorphismengruppe ist i.a. nicht abelsch.

Lemma 0.1.1 *Sei* G *eine Gruppe. Dann gilt:*

(1) Das neutrale Element e *ist 1-deutig bestimmt.*

(2) Das zu $x \in G$ *inverse Element* $x' \in G$ *ist durch* x *1-deutig bestimmt.*

Beweis: Vorlesung Lineare Algebra I.

Folgerung 0.1.2 *In jeder Gruppe gilt*

(1) $e' = e$

(2) $(x')' = x$

(3) $(x * y)' = y' * x'$

(4) Zu $a, b \in G$ *existiert genau ein* $x \in G$ *, nämlich* $a' * b$ *, mit* $a * x = b$ *.*

[8] Nils Hendrik Abel(1802-1829), norweg. Mathematiker

Beweis: Vorlesung Lineare Algebra I.

(4) besagt, dass für festes $g \in G$, die Abbildung

$$G \to G, x \mapsto g * x$$

bijektiv ist.

Konvention bei (abelschen) Gruppen

$*$	e	x'	$x * y'$	$x * x$
$+$	0	$-x$	$x - y$	$2 \cdot x$
$\cdot$	1	x^{-1}	x/y	x^2

Definition 0.1.3 (Körper) $(k, +, \cdot)$ *Körper* $:\Leftrightarrow$
k ist eine Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen

$+ \quad : k \times k \to k, (x, y) \mapsto x + y$ *(„Addition“)*

$\cdot \quad : k \times k \to k, (x, y) \mapsto x, y$ *(„Multiplikation“)*

derart, das gilt:

(ADD) $(k, +)$ *abelsche Gruppe mit neutralem Element* 0
$(k^* := k - \{0\})$
(MULT) $(k^*, \cdot)$ *abelsche Gruppe mit neutralem Element 1*
(DISTR) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *für alle* $a, b, c \in k$

Dass $(k^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, bedeutet insbesondere, dass die Multiplikation $\cdot$ das Produkt $k^* \times k^*$ nach k^* abbildet.

EX:

[1] $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper
[2] $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper
[3] $\{0, 1\}$

$\#$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_2 := (\{0, 1\}, \#, \bullet)$ Körper
$\mathbb{F}_2$ Baustein für binäre Codes.

Bemerkung 0.1.4 *In jedem Körper gilt*

(1) $1 \neq 0$

(2) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *oder* $y = 0$

(3) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$ *insbesondere:* $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$.

Beweis: (2): Ist $x = 0$, so ist $0 \cdot y = (0+0) \cdot y = 0 \cdot y + 0 \cdot y$, also
$0 = 0 \cdot y + (-(0 \cdot y)) = (0 \cdot y + 0 \cdot y) + (-(0 \cdot y)) = 0 \cdot y$. Ist umgekehrt $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$ und $y \neq 0$ so ist $y = x^-1 \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0$.
(3): $x \cdot y + (-(x \cdot y)) = 0$ nach Definition $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0$.
Da Inverse 1-deutig bestimmt sind, ist $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$. □

Für k Körper, $X \subset k$, sei $-X := \{x \in k \mid -x \in X\}$

Definition 0.1.5 (Angeordneter Körper)
k angeordneter Körper $:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine Teilmenge* $k_+ \subset k$ *so dass*

(ANORD)1	$k = -k_+ \cup \{0\} \cup k_+$ *paarweise disjunkt*
(ANORD)2	$x, y \in k_+ \Rightarrow x + y,\ x \cdot y \in k_+$

Dabei heißen zwei Mengen A, B disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.

Lemma 0.1.6 *k angeordneter Körper*
$x \in k, x \neq 0 \Rightarrow x^2 \in k_+$

Insbesondere: $1 \in k_+, 1 + 1 \neq 0$

Beweis: $0 \neq x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x), x$ oder $-x \in k_+$ □

EX: $\mathbb{F}_2$ kann man <u>nicht</u> anordnen.

Definition 0.1.7 *k angeordneter Körper,* $x, y \in k$, $\overline{k}_+ := k_+ \cup \{0\}$ 03/11/99

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in k_+ \text{ („}x\text{ kleiner als }y\text{“)}$$
$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in \overline{k}_+ \text{ („}x\text{ kleiner oder gleich }y\text{“)}$$

EX: $1 > 0$

Satz 0.1.8 $\leq$ *ist eine lineare Ordnungsrelation auf k, d.h.*

ORD1:	$x \leq x$	*(Reflexivität)*
ORD2:	$x \leq y\ ,\ y \leq x \Rightarrow x = y$	*(Antisymmetrie)*
ORD3:	$x \leq y\ ,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$	*(Transitivität)*
ORD4:	*Für alle* x, y *gilt genau eine der drei Aussagen:* $x < y\ ,\ x = y\ ,\ y < x$	

Beweis: Folgt unmittelbar aus **(ANORD)1/2**.

Folgerung 0.1.9

(1) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x + a \leq y + a$ *für alle* $a \in k$

(2) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x \leq a \cdot y$ *für alle* $a \in k_+$

(3) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad -y \leq -x$

(4) $0 < x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

Beweis – exemplarisch (2) und (3): (2): $x \leq y \Rightarrow y - x \in \overline{k}_+$. Ist $y - x = 0$, $a \in k_+$ so ist $a \cdot (y-x) = a \cdot y - a \cdot x = 0$, also $a \cdot y \geq a \cdot x$. Ist $y - x \in k_+, a \in k_+$, so ist auch $a \cdot (y - x) = a \cdot y - a \cdot x \in k_+$, also $a \cdot x \leq a \cdot y$. Da $1 \in k_+$ ist die Umkehrung trivial.
(4): Es genügt zu zeigen, dass $0 < x \leq y$ die Ungleichung $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ impliziert. Nach (2) ist zunächst $0 < x \cdot y$, also $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{x \cdot y} \in \overline{k}_+$ da sonst $y - x < 0$, d.h. $0 \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$. Da $\frac{1}{y} \neq 0$, ist $\frac{1}{y} > 0$. □

Definition 0.1.10 *k angeordneter Körper, $T \subset k$ T induktiv* $:\Leftrightarrow$

$I_1 : \ 0 \in T$

$I_2 : \ x \in T \Rightarrow x + 1 \in T$

Beispielsweise ist k selbst, $\overline{k}_+$ und $\{0\} \cup \{x \in k \mid x \geq 1\}$ induktiv. Insbesondere ist

$$J := \{T \in Pk \mid T \text{ induktiv } \} \neq \emptyset$$

und

$$\mathbb{N} := \bigcap_{T \in J} T \neq \emptyset$$

Offenbar gilt: 5/11/99

(1) $0 \in \mathbb{N}$

(2) $n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \Rightarrow n \geq 1$

(3) $\mathbb{N}$ kleinste induktive Menge in k d.h. $\mathbb{N}$ ist induktiv und ist $T \subset k$ induktiv, so ist $\mathbb{N} \subset T$.

Per definitionem ist die so definierte Menge $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Man kann zeigen, dass sie nicht von k abhängt, genauer:
Ist k ein angeordneter Körper mit den neutralen Elementen 0,1, k' ein weiterer angeordneter Körper mit den neutralen Elementen $0', 1'; \mathbb{N} \subset k$ die kleinste induktive Menge in k und $\mathbb{N}' \subset k'$ die kleinste induktive Menge in k', so gibt es genau eine Bijektion

$$' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}',\ n \longmapsto n'$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} (n+1)' & = & n' + 1' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Addition in } k & & \text{Addition in } k' \end{array}$$

d.h. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$ unterscheiden sich gewissermaßen nur „typographisch “.

Plausibilitätsbetrachtung:

$\mathbb{N}_{naiv} := \{0, 1, 2 = 1+1,\ 3 = (1+1)+1, \ldots\}$

- $\mathbb{N}_{naiv} \subset \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}_{naiv}$ induktiv

also $\mathbb{N}_{naiv} = \mathbb{N}$

Wo liegt eigentlich das Problem ?! ...

Definition 0.1.11

(1) $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \bigcup -\mathbb{N}$

(2) $\mathbb{Q} := \left\{x \in k \mid \textit{Es gibt } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \textit{ so dass } x = \frac{p}{q}\right\}$

$\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

Bemerkung 0.1.12 *Für jeden angeordneten Körper k gilt*

(1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset k$

(2) $\mathbb{Q}$ *ist ein angeordneter Körper mit der Anordnung* $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \bigcap k_+$; $\mathbb{Q}$ *ist tatsächlich der „kleinste“ Körper, der* $\mathbb{N}$ *umfasst.*

(3) $\mathbb{Q}$ *ist wieder 1-deutig in folgendem Sinne: Ist* $\mathbb{Q}'$ *induziert von* k'*, so existiert genau eine Bijektion*

$$' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}', \ r \mapsto r'$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} (r \dot{+} s)' & = & r' \dot{+} s' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \textit{in } k & & \textit{in } k' \end{array}$$

insbesondere

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'}{q'}$$

Satz 0.1.13 (Induktionsprinzip) $T \subset \mathbb{N}$ *so dass*

(1) $0 \in T$

(2) $n \in T \Rightarrow n + 1 \in T$

Dann ist $T = \mathbb{N}$

Beweis: $T \in J \Rightarrow \mathbb{N} \subset T$ □

Lemma 0.1.14 $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \dot{\pm} m \in \mathbb{Z}$

[HS] $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{Z}$

Beweis: $T := \{n \in \mathbb{N} \mid n - 1 \in \mathbb{Z}\}$ induktiv, also $T = \mathbb{N}$ □

Beweis des Lemmas – exemplarisch für $n + m \in \mathbb{Z}$*:*
Sei $T := \{n \in \mathbb{N} \mid n + m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}\}$ Offenbar ist 0 ∈ T. Sei n ∈ T. Dann ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ die Summe $n + m \in \mathbb{Z}$. Ist $n + m \geq 0$, so ist $n + m \in \mathbb{N}$, also auch $(n + 1) + m = (n + m) + 1 \in \mathbb{N}$. Ist $n + m < 0$, so ist $-n - m \in \mathbb{N}$, also nach **[HS]** $-n - m - 1 \in \mathbb{Z}$ und damit $(n + 1) + m \in \mathbb{Z}$, d.h. $(n + 1) + m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, also $n + 1 \in T$. Folglich ist $T = \mathbb{N}$, d.h. $n + m \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin \mathbb{N}$: Dann ist $-n \in \mathbb{N}$ und damit $-n + m \in \mathbb{Z}$ für alle m ∈ $\mathbb{Z}$. Da mit m auch $-m \in \mathbb{Z}$ ist, also $-n - m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, ist $n + m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. □

Folgerung 0.1.15 $n \in \mathbb{Z}$*,* $x \in \mathbb{Z}$ *so dass* $n \leq x \leq n + 1$*, dann ist*

$$x = n \textit{ oder } x = n + 1.$$

Zwischen der ganzen Zahl n und $n+1$ liegt also keine weitere ganze Zahl.

Beweis: $0 \leq x - n \leq 1, x - n \in \mathbb{N}$. Ist $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, so ist $m \geq 1$. □

Bezeichnung

Für $x_j \in k,\ 0 \leq j \leq n,\ j \in \mathbb{N}$ sei

$$\sum_{j=o}^{n} x_j := (((\ldots(x_0 + x_1) + x_2) + \ldots + x_n)$$

und

$$\prod_{j=0}^{n} x_j := (((\ldots(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot \ldots \cdot x_n)$$

Die Summe und das Produkt ist unabhängig von der Beklammerung und der Reihenfolge.

Für $x \in k, n \in \mathbb{N}$ sei

$$x^n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x^1 & n = 1 \\ x \cdot x^{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

Ist x $\neq 0$ so ist per definitionem

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

RECHENREGELN (falls definiert) $x, y \in k,\ n, m \in \mathbb{Z}$

(1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(2) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

(3) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

EX:

[1] **(Geometrische Summe)** $1 \neq x \in k,\ n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ⓢ} \quad \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Beweis:

$$T := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right\} \text{ induktiv}$$

□

[2] **(Bernoulli'sche Ungleichung[9])** k angeordneter Körper, $x \in k$ so dass $-1 < x$

$$Ⓢ \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis: $T := \{n \in \mathbb{N} | (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x\}$ induktiv □

Satz 0.1.16 (Verschiebung des Induktionsanfangs) $W \subset \mathbb{Z}, m_* \in \mathbb{Z}$ *so dass*

(1) $m_* \in W$

(2) $m \in W, m \geq m_* \Rightarrow m + 1 \in W$

Dann ist $\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq m_*\} \subset W$.

Beweis: $m \geq m_*, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $m = m_* + n$.
$T := \{n \in \mathbb{N} \mid m_* + n\}$ induktiv, also $T = \mathbb{N}$ □

EX: (Verschärfte Bernoullische Ungleichung)

$(1 + x)^n > 1 + n \cdot x$ für $x > -1 (x \neq 0), n \geq 2$
$W := \{m \in \mathbb{Z} \mid (1 + x)^m > 1 + m \cdot x\}$ Offenbar 0,1 $\notin W$. Für $m_* = 2$ ist $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ da $x^2 > 0$, d.h. 2 $\in$ W. Ist
$n \in W,\ n \geq 2$ so ist $(1 + x)^n > 1 + n \cdot x$. Da $1 + x > 0$ folgt
$(1 + x)^{n+1} > (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$ d.h.
$(n + 1) \in W$ und daher $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\} \subset W$

Theorem 0.1.17 *: Es gibt keine rationale Zahl* $x \in \mathbb{Q}$ *mit* $x^2 = 2$

Beweis: Sei

$$\mathbb{N}_{gerade} := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein m} \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2m\}$$

die Menge der geraden natürlichen Zahlen und

$$\mathbb{N}_{ungerade} := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein m} \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2m + 1\}$$

die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Dann gilt

[9] Jakob Bernoulli (1654 - 1705), schweizer Gelehrtenfamilie

$$(1)\ \mathbb{N}_{gerade} \bigcap \mathbb{N}_{ungerade} = \emptyset$$

$$(2)\ \mathbb{N}_{gerade} \bigcup \mathbb{N}_{ungerade} = \mathbb{N}$$

da

$$T := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2m \text{ oder } n = 2m + 1\ \}$$

induktiv ist und $2 \cdot p > 1$ für $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$.

Angenommen, es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so dass $x^2 = 2$. Sei Œ[10] $x = \frac{p}{q}$, $p,\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0$, nicht beide gerade, also $p^2 = 2q^2$. Daher ist zunächst p^2 gerade. Dann muss aber p selbst gerade sein, etwa $p = 2m$ und daher $2m^2 = q^2$ also q gerade, ein Widerspruch. □

Problem: Welche Eigenschaft eines angeordneten Körpers garantiert, dass man in k „Wurzeln ziehen kann“ ?

k angeordneter Körper, $s, c \in k,\ X \subset k$ 9/11/99

Definition 0.1.18

(1) c obere (untere) Schranke von $X :\Leftrightarrow x \leq c\ (c \leq x)$ *für alle* $x \in X$.

(2) X *nach oben (unten) beschränkt* $:\Leftrightarrow$ X *besitzt eine obere (untere) Schranke.*

(3) s *Supremum (Infimum) von* X $:\Leftrightarrow$

(I) s *obere (untere) Schranke von* X

(II) Ist c irgendeine obere (untere) Schranke von X *so ist* $s \leq c$ $(c \leq s)$.

EX:

[1] Jedes Element von k ist eine obere/untere Schranke von $\emptyset \subset k$. $\emptyset$ besitzt aber kein Supremum/Infimum.
[2] Jedes Element von $-k_+$ ist untere Schranke von k_+ und 0 ist ein Infimum von k_+ aber $0\ \notin k_+$.
[3] $\frac{3}{2}$ ist eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$ von $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Aber diese Menge hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$, da für ein Supremum s notwendigerweise $s^2 = 2$ ist (vgl. 0.1.30).

Lemma 0.1.19 *Eine Menge* $X \subset k$ *hat höchstens ein Supremum (Infimum).*

[10]=ohne Einschränkung

Beweis: Sind s, s' zwei Suprema in X , so ist $s \leq s'$ und $s' \leq s$, also $s = s'$. $\square$

Bezeichnung
Besitzt eine Menge $X \subset k$ ein Supremum (Infimum), so wird dieses mit $\sup X$ ($\inf X$) bezeichnet. Ist sogar $\sup X \in X$ ($\inf X \in X$) so spricht man vom Maximum (Minimum) von X :

$$\max X := \sup X, \quad falls \quad \sup X \in X$$

$$\min X := \inf X, \quad falls \quad \inf X \in X.$$

EX: $0 = \inf k_+$, aber k_+ hat kein Minimum; $0 = \min \overline{k}_+$.

Lemma 0.1.20 *Hat die Menge $X \subset k$ ein Supremum, so hat die (gespiegelte) Menge $-X$ ein Infimum und es gilt*

$$-\sup X = \inf(-X).$$

Beweis: $s = \sup X \Rightarrow x \leq s$ für alle $x \in X \Rightarrow -s \leq -x$ für alle $x \in X$, d.h. $-s$ untere Schranke von $-X$. Ist c irgendeine untere Schranke von $-X$, d.h. $c \leq -x$ für alle $x \in X$, so ist $x \leq -c$ für alle $x \in X$, also $s \leq -c$, d.h. $c \leq -s$. Damit ist $-s$ das Infimum von $-X$. $\square$

Lemma 0.1.21 *Sei $X \subset k$, $s \in k$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) $s = \sup X$

(ii) *s obere Schranke von X, und zu jemdem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in k$, gibt es ein $x \in X$ so dass $s - \varepsilon < x \leq s$.*

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Jedes Supremum ist insbesondere eine obere Schranke. Gäbe es zu $\varepsilon > 0$ kein $x \in X$ mit $s - \varepsilon < x$, so wäre $x \leq x - \varepsilon$ für alle $x \in X$, d.h. $s - \varepsilon$ obere Schranke, also da $s = \sup\ X$, $s \leq s - \varepsilon$, d.h. $0 < -\varepsilon$, ein Widerspruch.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $c \in k$ irgend eine obere Schranke von X und $c < s$. Dann ist $\varepsilon := s - c > 0$. Daher gibt es ein $x \in X$ mit $c = s - (s - c) < x \leq s$, ein Widerspruch. $\square$

Definition 0.1.22 (Supremumsaxiom) *k angeordneter Körper.*
*k heißt nach oben vollständig :$\Leftrightarrow$ **(SUP)** Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge $\emptyset \neq X \subset k$ hat ein Supremum.*

Theorem 0.1.23 *(ohne Beweis) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen angeordneten Körper mit **(SUP)** - den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.*

Bis auf Isomorphie heißt Folgendes: Ist $\mathbb{R}'$ ein zweiter derartiger Körper, so existiert genau eine Bijektion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}', \ x \longmapsto x'$$

so dass

(1) $(x \underset{\cdot}{+} y)' \ = x' \underset{\cdot}{+} y'$

(2) $x < y \Leftrightarrow x' < y'$

Da $\mathbb{R}$ angeordnet, ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+$ ist die Menge der positiven Zahlen,

$-\mathbb{R}_+$ die Menge der negativen und

$\overline{\mathbb{R}}_+$ die der nicht-negativen Zahlen.

$\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \cap \mathbb{R}_+ = \{n \in N \mid x \geq 1\}$.

$\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}_+$

Ist $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ nach unten beschänkt, so ist $-X$ nach oben beschränkt. Daher existiert inf X und es gilt

$$\inf \ X = -\sup \ (-X).$$

Satz 0.1.24 *$\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$ nach oben (unten) beschränkt. Dann existiert* $\max X$ $(\min X)$.

Beweis: $\emptyset \neq X$ nach oben beschränkt, $s = \sup X, 0 < \epsilon < 1$. Dann gibt es ein $n \in X$, so dass $s - \epsilon < n \leq s$. Ist $n = s$, so ist $\sup X = \max X = n \in X$. Anderfalls ist $s - n < s$. Dann gibt es ein $m \in X$ so dass $s - \epsilon < n < m \leq s$ d.h. $0 < m - n < 1, m - n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch □

Theorem 0.1.25 (Satz von Archimedes[11]) *Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so dass $x < n$.*

Beweis: Sonst existiert $\sup \mathbb{N}$ und ein $n_* \in \mathbb{N}$ mit $\sup \mathbb{N} - 1 < n_* \leq \sup \mathbb{N}$, d.h. $\sup \mathbb{N} < n_* + 1 \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch. □

[11] Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr) griech. Philosoph

Folgerung 0.1.26 $\inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} = 0$

Beweis: $\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} =: i$ existiert, $i \geq 0$. Wäre $i > 0$, so existierte ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{i} < n$, also $\frac{1}{n} < i$, ein Widerspruch. □

Folgerung 0.1.27

(1) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $[x] \in \mathbb{Z}$ so dass $[x] \leq x < [x] + 1$ („größte ganze Zahl $\leq x$“)

(2) zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gibt es ein $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ so dass $a < \frac{p}{q} < b$.

Beweis: (1): Nach Archimedes gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so dass $x - 1 < m$. Sei $[x] := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid x - 1 < m\}$. Dann ist zunächst $x < [x] + 1$. Wäre $x < [x]$, so wäre $x - 1 < [x] - 1$, also $[x] \leq [x] - 1$, ein Wiederspruch. Ist $m \in \mathbb{Z}$ und ebenfalls $m \leq x < m + 1$ so ist Œ $[x] \leq m \leq x < [x] + 1$, also $m = [x]$.
(2): Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $N(b - a) > 1$. Damit ist insbesondere $N \neq 0$, $N \cdot a < [Na] + 1 < N \cdot b$, da sonst $1 = [Na] + 1 - [Na] \geq N \cdot b - [Na) \geq N \cdot b - N \cdot a > 1$; $a < \frac{[Na]+1}{N} <$ b ist die gesuchte rationale Zahl. □

Definition 0.1.28 *$I \subset \mathbb{R}$ Intervall $:\Leftrightarrow$ für alle $a, b \in I, a \leq b$ ist* 10/11/99
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset I$

EX:

[1] $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\mathbb{R}_+$ Intervalle
[2] $[a, b]$ ist ein sogenanntes abgeschlossenes Intervall mit den Grenzen a, b
[3] $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ein sogenanntes offenes Intervall mit den Grenzen a, b.

Theorem 0.1.29 (Intervallschachtelungsprinzip) *a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

genauer:[12] *Mit $a := \sup\ a_n \leq \inf\ b_n =: b$, gilt*

$$[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

---

[12] $\sup\ a_n := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zusatz: Ist $\inf\,(b_n - a_n) = 0$, *so besteht das Intervall* $[a, b]$ *aus genau einem Punkt, nämlich* $a = b$.

EX:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n+1}\right] = \{0\}$$

aber

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n+1}\right) = \emptyset.$$

Beweis: Für festes $m \in \mathbb{N}$ ist $a_n \le b_m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a := \sup a_n \le b_m$, folglich $a \le b := \inf b_m$ und $\emptyset \ne [a, b] \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}}[a_m, b_m]$. Sei $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}}[a_m, b_m]$. Dann ist $a_m \le x \le b_m$ für alle m, d.h. $a \le x \le b$. $\square$

Theorem 0.1.30 (N-te Wurzel) *Zu* $N \in \mathbb{N}_+$ *und* $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *gibt es genau ein* $\xi \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *so dass* $\xi^N = x$.

ξ heißt die N-te Wurzel von x, $\sqrt[N]{x} := x^{\frac{1}{N}} := \xi$.

Folgerung 0.1.31 *Die Abbildung* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $n \in \mathbb{N}_+$, *hat folgende Eigenschaften*

(1) $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$

(2) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

(3) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
Insbesondere: $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

(4) $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x} = \sqrt[n\cdot m]{x^{n+m}}$, $n, m \in \mathbb{N}_+$

Beweis: Vorbemerkung: $0 < y \le z \Leftrightarrow 0 < y^n \le z^n$ (Induktion). Daher ist ξ 1-deutig, falls existent. Œ $x > 0$. $X := \{y \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid y^N \le x\} \ni 0$. Wegen $(1 + x)^N \ge 1 + N \cdot x > x$ ist $1 + x$ obere Schranke von X, also existiert $\xi := \sup X$, $\xi \ge 0$. Nach Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{n} < x$ also $(\frac{1}{n})^N \le \frac{1}{n} < x$. damit ist sogar $\xi \ge \frac{1}{n} > 0$. Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Dann ist $\frac{\xi^N}{(1-\frac{\epsilon}{N})^N} \ge x$ da sonst $\xi \ge \frac{\xi}{(1-\frac{\epsilon}{N})}$, d.h. $1 - \frac{\epsilon}{N} \ge 1$. Anderseits ist $\xi(1 - \frac{\epsilon}{N}) < \xi$. Daher gibt es ein $\eta \in X$ so dass $\xi(1 - \frac{\epsilon}{N}) < \eta \le \xi$. Nach Bernoulli folgt

$$\xi^N(1 - \epsilon) \le \eta^N \le x \le \frac{\xi^N}{(1 - \epsilon)}$$

also

$$1 - \epsilon \le \frac{x}{\xi^N} \le \frac{1}{1-\epsilon}$$

Da diese Ungleichung für alle $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ gilt, ist $\frac{x}{\xi^N} = 1$. $\square$

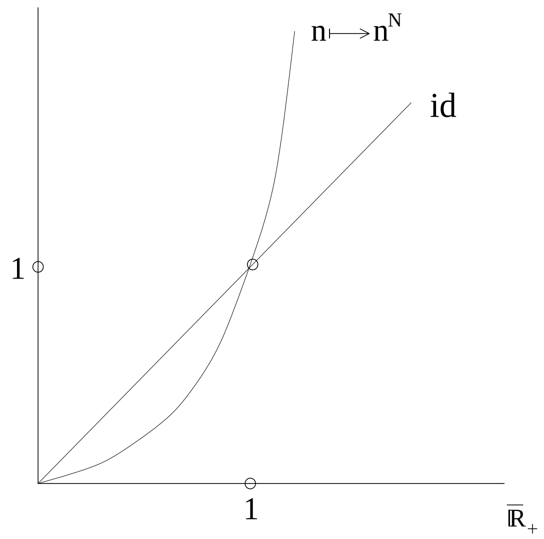
Folgerung 0.1.32

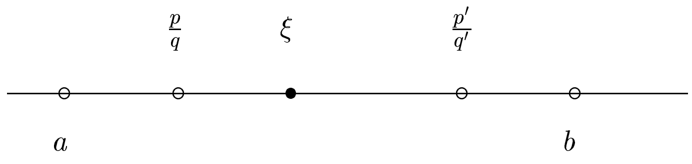
(1) $\overline{\mathbb{R}}_+ \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $t \mapsto t^N$, *surjektiv*[13]

(2) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, *da* $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *(*$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist die Menge der irrationalen Zahlen)*

(3) $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid$ *Es gibt ein* $x \in \mathbb{R}^*$ *so dass* $x^2 = y\}$, *insbesondere lässt sich* $\mathbb{R}$ *nur auf eine Weise anordnen.*

(4) *Zu* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *gibt es eine irrationale Zahl* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *so dass* $a < \xi < b$.





[13] surjektive Abbildungen werden mit „Doppelspitze“ $X \twoheadrightarrow Y$ bezeichnet, injektive mit $X \hookrightarrow Y$

Wähle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ so dass $a < \frac{p}{q} < b$ und definiere

$$\xi := \frac{p}{q} + \frac{\sqrt{2}}{N}, N \gg 0, N \in \mathbb{N} \ (N \gg 0 \text{ bedeutet: } N \text{ genügend groß})$$

Problem: Gibt es „mehr“ irrationale oder mehr „rationale“ Zahlen ?