1.1 Potenzreihen

Lemma 1.1.0 (Lemma von Abel) *(a_n) reelle Folge, $b > 0$ so dass $(a_n b^n)$ beschränkt, $0 \leq r < b$. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

absolut für alle $|x| \leq r$.

Beweis : Ist $|a_n b^n| \leq C$ für alle n, so ist

$$C \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{b}\right)^n$$

konvergente Majorante für $|x| \leq r$. □

EX:

$$\sum_{n \geq 0} n x^n \text{ konvergiert absolut für } |x| < 1.$$

Für $0 < b < 1$ ist $b = \frac{1}{1+\delta}$, $\delta > 0$, also $nb^n = \frac{n}{(1+\delta)^n} \leq \frac{n}{1+n\delta} < \frac{1}{\delta}$.

Bekanntlich gibt es zu jeder Menge X eine Menge Y, so dass $Y \notin X$. Deshalb gibt es Mengen $+\infty$ und $-\infty$[7], so dass
$\pm\infty \notin \mathbb{R}, +\infty \neq -\infty$. Durch

$$-\infty < x < +\infty, \; x \in \mathbb{R}$$

wird die Ordnung von $\mathbb{R}$ auf $^\natural\mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fortgesetzt. Für eine Potenzreihe $A(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ sei

$$K_A := \{b \geq 0 \mid (a_n b^n) \text{ beschränkt}\}$$

und

$$R_A := \begin{cases} +\infty & K_A \text{ unbeschränkt} \\ \sup K_A & K_A \text{ beschränkt} \end{cases}$$

R_A ist der sogenannte Konvergenzradius in A.

Satz 1.1.1

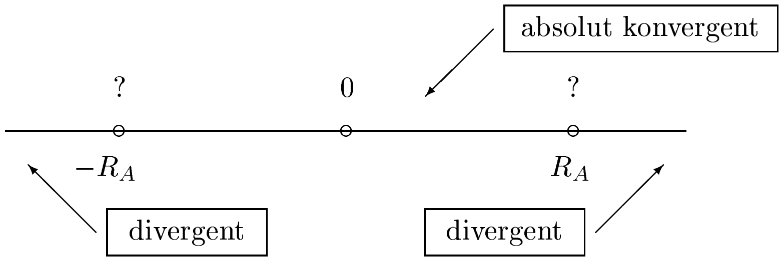
(1)

$$\sum_{n \geq o} a_n x^n \textit{ konvergiert absolut für } |x| < R_A$$

[7] plus bzw. minus unendlich

(2)

$$\sum_{n\geq o} a_n x^n \text{ divergiert für } |x| > R_A$$



EX:

[1]

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ hat den Konvergenzradius 1.}$$

$$|x| < 1 : \sum_{n\geq 1} \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \sum_{n\geq 0} |x|^n \text{ konvergente Majorante, d.h. } R_A \geq 1.$$

$$x = 1 : \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergiert, d.h. } R_A \leq 1.$$

$$x = -1 : \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konvergent.}$$

Folgerung: Auf dem Rand $|x| = R_A$ des „Konvergenzkreises“ K_A kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.

[2]

$$\sum_{n\geq 0} n! x^n \text{ hat den Konvergenzradius 0.}$$

Wäre nämlich $R_A > 0$ so existiert $0 < b,\ c$ so dass $n!b^n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also für $n >> 0$:

$$\frac{n}{e} < \frac{n}{e} \cdot \sqrt[n]{e} < \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{b} \cdot \sqrt[n]{c} \leq \frac{2}{b},$$

ein Widerspruch.

Die Partialsummen $A_n(x)$ einer Potenzreihe 8/12/99

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

sind Polynome vom Grade $\leq\ n$,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

ein Polynom und $\#NST(p) > n$ so verschwinden alle Koeffizienten $p_k = 0$. Bei Potenzreihen verhält es sich genau so.

Satz 1.1.2 (Identitässatz) $A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *Potenzreihe mit* $R_A > 0$, $0 < r < R_A$ *so dass* $A(x) = 0$ *für* $|x| \leq r$. *Dann ist* $a_n = 0$ *für alle* n.

Folgerung 1.1.3

äq

(i) $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n,\ |x| \leq r$

(ii) $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis : Angenommen $\{n \mid a_n \neq 0\} \neq \emptyset$. Dann existiert $m := \min\{n \mid a_n \neq 0\}$,

$$A(x) = x^m \cdot \sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k,$$

insbesondere

$$\sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k = 0 \text{ für } 0 < |x| \leq r,$$

also

$$0 = \left|\sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k\right| \geq \left||a_m| - \left|\sum_{k\geq 0} a_{m+k} x^k\right|\right|$$

und damit für $o < |x| \leq r$

$$|a_m| = \left|\sum_{k\geq 1} a_{m+k} x^k\right| = |x| \left|\sum_{k\geq 1} a_{m+k} x^{k-1}\right| \leq |x| \cdot const,$$

folglich $a_m = 0$. □

Satz 1.1.4

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \ B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

Dann hat die Potenzreihe

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \ c_n := \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$$

den Konvergenzradius $R_C \geq \min\{R_A, \ R_B\}$ *und es gilt für alle* $|x| < \ min\{R_A, \ R_B\}$

$$C(x) = A(x) \cdot B(x).$$

EX:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} x^n, \ B(x) = 1 - x, \ C(x) = 1$$

$$R_C = +\infty > \min\{R_A, \ R_B\} = 1.$$

[HS] $\sum\limits_{n\geq 0} u_n, \ \sum\limits_{n\geq 0} v_n$ absolut konvergent,
$w_n := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$
Dann ist auch $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ absolut konvergent und es ist

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right) \textbf{ (Allgemeines Distributivgesetz)}.$$

Beweis : Es existiert ein $c \geq 0$ so dass

$$\sum_{n\geq 0} |u_n|, \ \sum_{n\geq 0} |v_n| \leq c.$$

Dann ist für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} |w_k| = \sum_{i+j\leq m} |u_i||v_j| \leq \left(\sum_{i\leq m} |u_i|\right)\left(\sum_{j\leq m} |v_j|\right) \leq c^2,$$

d.h. $\sum\limits_{n\geq 0} w_k$ konvergiert absolut.
Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k, \ t_n := \sum\limits_{k=0}^{n} v_k, \ t = \lim s_n, \ s = \lim t_n.$
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sum_{k\geq N} |u_k|, \ \sum_{k\geq N} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot c + 1}.$$

Für $m > 2N$ ist dann

$$\begin{aligned}
\left| s_m t_m - \sum_{k=0}^{m} w_k \right| &= \left| \sum_{i,j\le m} u_i v_j - \sum_{i+j\le m} u_i v_j \right| \\
&\le \sum_{\substack{i,j\le m \\ i+j>m}} |u_i||v_j| \\
&\le \sum_{\substack{i\le m \\ j>N}} |u_i||v_j| + \sum_{\substack{j\le m \\ i>N}} |u_i||v_j| \\
&\le c\cdot \sum_{j>N} |v_j| + c\cdot \sum_{i>N} |u_i|.
\end{aligned}$$

In der Grenze ist damit

$$\left| s\cdot t - \sum_{k\ge 0} w_k \right| \le \frac{c\varepsilon}{2c+1} < \varepsilon,$$

d.h.

$$s\cdot t = \sum_{k\ge 0} w_k.$$

□

Bemerkung 1.1.5 (Ergänzung (nicht Teil der Vorlesung))

$(a_n)_{n\ge 0}$ beschränkte Folge reeller Zahlen

$$\overline{a_n} := \sup\{a_k | k\ge n\} = \sup_{k\ge n} a_k$$

$$\underline{a_n} := \inf\{a_k | k\ge n\} = \inf_{k\ge n} a_k.$$

Offenbar gilt

(1) $\underline{a_n} \le a_n \le \overline{a_n}$

(2) $\underline{a_n} \nearrow, \overline{a_n} \searrow$.

Da (a_n) beschränkt ist, existieren die Limiten $\lim \underline{a_n}$ bzw. $\lim \overline{a_n}$ und es gilt

$$\overline{\lim} a_n := \lim \overline{a_n} = \inf_n \sup_{k\ge n} a_k \text{ (limes superior)}$$

$$\underline{\lim} a_n := \lim \underline{a_n} = \sup_n \inf_{k\ge n} a_k \text{ (limes inferior)}$$

Ⓢ$(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkte Folge reeller Zahlen

äq

(i) (a_n) konvergent

(ii) $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$.

Folgerung 1.1.6 *Konvergiert* (a_n) *so ist* $\lim a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$.

Beweis : *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* : $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : $\underline{\lim} a_n \leq \lim a_n \leq \overline{\lim} a_n$. $a := \lim a_n,\ \varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \geq 0$ so dass $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also
$a - \varepsilon \leq \underline{a}_n \leq \overline{a}_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ für alle $n \geq N$. Damit ist
$a - \varepsilon \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq a + \varepsilon$, d.h. $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \lim a_n$. □

Theorem 1.1.7 (Hadamard) $\Delta(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *so dass* $(\sqrt[n]{|a_n|})$ *beschränkt. Dann ist*

$$R_A = \begin{cases} \infty & \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \neq 0. \end{cases}$$

EX: $A(x) = \sum\limits_{n\geq 0}(1 + (-1)^n)n \cdot x^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \equiv 1(2) \\ \sqrt[n]{2n} & n \equiv 0(2) \end{cases}$$

$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, d.h. $R_A = 1$.

Beweis : Da $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt, ist $R_A > 0$. Zu $0 < t < R_A$ gibt es dann ein $c > 0$ so dass $|a_n t^n| \leq c$, d.h. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{c}}{t}$ und damit $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{t}$. Ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, so ist $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \geq t$, d.h. $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \geq R_A$, insbesondere $R_A \neq \infty$. Ist $0 < t < \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$, so ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup_{k\geq n}\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{t}$$

für alle $n \geq N$, N geeignet und damit $(a_n t^n)$ beschränkt, d.h.
$R_A \geq \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $1 > \varepsilon > 0$ so ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$, N geeignet, d.h. $(a_n \varepsilon^{-n})$ beschränkt und damit $R_A = \infty$. □