Kapitel 4

Differenzierbare Funktionen

4.0 Lineare Approximation

26/01/00

$X \subset \mathbb{R},\ \overline{x} \in \mathbb{R},\ f : X \to \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$

Definition 4.0.0 *:*

(1) $\overline{x}$ *Häufungspunkt von* X $:\Leftrightarrow$ *Es gibt eine Folge* $x_n \in X,\ x_n \neq \overline{x}$*, so dass* $x_n \to \overline{x}$.

(2) A *Grenzwert von* f *in dem Häufungspunkt* $\overline{x}$ $:\Leftrightarrow$ $f(x_n) \to A$ *für alle* $x_n \to x,\ x_n \in X,\ x_n \neq \overline{x}$.

Lemma 4.0.1 *:*
$f : X \to \mathbb{R}$ hat in einem Häufungspunkt $\overline{x}$ von X höchstens einen Grenzwert A.
Hat f in $\overline{x}$ den Grenzwert A, so schreibt man dafür auch

$$A = \lim_{x \to \overline{x}} f(x).$$

Offenbar ist $A = \lim_{x \to \overline{x}} f(x)$ genau dann, wenn die Funktion

$$x \mapsto \widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq \overline{x} \\ A & x = \overline{x} \end{cases}$$

stetig in $\overline{x}$ ist.

EX: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Im folgenden sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, so dass jeder Punkt $x \in X$ Häufungspunkt von X ist. Offenbar hat jedes nicht-ausgeartete Intervall diese Eigenschaft, ebenso wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nicht aber $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

Definition 4.0.2 *:*
$\overline{x} \in X,\ f : X \to \mathbb{R}$

(1) f linear approximierbar in $\overline{x}$ (differenzierbar in $\overline{x}$) :$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $A \in \mathbb{R},\ r : X \to \mathbb{R}$, so dass

D1: $f(x) = f(\overline{x}) + A(x - \overline{x}) + r(x)(x - \overline{x})$

D2: r stetig in $\overline{x},\ r(\overline{x}) = 0$.

(2) f differenzierbar: $\Leftrightarrow$ f differenzierbar in allen $\overline{x} \in X$.

Lemma 4.0.3 *:*
Ist f in $\overline{x} \in X$ linear approximierbar, so sind A und r 1-deutig bestimmt.

Beweis : Da $\overline{x}$ Häufungspunkt, gibt es eine Folge $x_n \in X,\ x_n \neq \overline{x},\ x_n \to \overline{x}$.
Aus $(A - A^*)(x_n - \overline{x}) = (r^*(x_n) - r(x_n))(x_n - \overline{x})$ folgt
$A - A^* = r^*(x_n) - r(x_n) \to 0$, d.h. $A = A^*,\ r = r^*$. □

Ist f in $\overline{x}$ linear approximierbar, so heißt die 1-deutig bestimmte reelle Zahl A die Ableitung von f in $\overline{x}$;

$$Df(\overline{x}) := \frac{df}{dx}(\overline{x}) := f'(\overline{x}) := A.$$

Bemerkung 4.0.4 *:* 28/01/00
f linear approximierbar in $\overline{x}$ $\underset{i.a.}{\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}}$ *f stetig in $\overline{x}$.*

EX:

[1] $x \mapsto |x|$ linear approximierbar in allen $\overline{x} \neq 0$; in $\overline{x} = 0$ ist die Funktion stetig, aber nicht linear approximierbar.

[2] Jede konstante Funktion f ist linear approximierbar, $Df(\overline{x}) = 0$ für alle $\overline{x}$.

[3] $n \in \mathbb{N}_+,\ x \mapsto f(x) := x^n$.
f ist in allen $\overline{x} \in \mathbb{R}$ linear approximierbar, und $Df(\overline{x}) = n \cdot \overline{x}^{n-1}$
denn :

$$x^n = \overline{x}^n + n \cdot \overline{x}^{n-1}(x - \overline{x}) + r(x)(x - \overline{x})$$

und

$$r(x) = \overline{x}^{n-1} + \overline{x}^{n-2}x + \ldots + \overline{x}x^{n-2} + x^{n-1} - n\overline{x}^{n-1}$$

Satz 4.0.5 *:*
$f : x \to \mathbb{R},\ \overline{x} \in X,\ A \in \mathbb{R}$

äq

(*i*) *f linear approximierbar in* $\overline{x}$, $Df(\overline{x}) = A$.

(*ii*) *Es gibt ein* $h : X \to \mathbb{R}$, *so dass*

(1) h *stetig in* $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = A$

(2) $f(x) = f(\overline{x}) + h(x)(x - \overline{x})$.

(*iii*) $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \neq \overline{x}}} \dfrac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$ *existiert und stimmt mit A überein.*

Folgerung 4.0.6 *:*
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Regelfunktion,* $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$, $\overline{x} \in [a, b]$ *so dass f stetig in* $\overline{x}$. *Dann ist F linear approximierbar in* $\overline{x}$, $DF(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

EX:

[1] $\exp' = \exp$

[2] $\log' x = \frac{1}{x}$

[3] $\sin' = \cos,\ \cos' = -\sin$

[4] $\arctan' = \frac{1}{1+sq}$.

WARNUNG:

Es gibt stetige Funktionen, die in keinem Punkt differenzierbar sind:
$a \in \mathbb{N}_+$ ungerade, $0 < b < 1$ so dass $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$,
$x \mapsto f(x) := \sum\limits_{k \geq 0} b^k cos(a^k \pi x)$.
f stetig, $||f|| \leq \frac{1}{1-b}$, aber in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Rechenregeln 4.0.7 *:*
f, g linear approximierbar in $\overline{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) LINEARITÄT
$f \pm g$, $\lambda \cdot f$ *linear approximierbar in* $\overline{x}$, $D(f \pm g)(\overline{x}) = Df(\overline{x}) \pm Dg(\overline{x})$, $D(\lambda \cdot f)(\overline{x}) = \lambda \cdot Df(\overline{x})$.

(2) PRODUKT-Regel
$f \cdot g$ *linear approximierbar in* $\overline{x}$, $D(f \cdot g)(\overline{x}) = Df(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) + f(\overline{x}) \cdot Dg(\overline{x})$.

(3) QUOTIENTEN-Regel
Ist $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$, *so ist* $\frac{f}{g}$ *linear approximierbar in* $\overline{x}$, $D(\frac{f}{g})(\overline{x}) = \frac{Df(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) - f(\overline{x}) Dg(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$.

EX:

[1] $p(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$, $Dp(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

[2] $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $D\tan = \frac{1}{\cos^2}$.

Exemplarischer *Beweis der QR:* Œ $f = 1$.
$g(x) = g(\overline{x}) + h(x)(x - \overline{x})$, h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = Dg(\overline{x})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(\overline{x})} &= -\frac{g(x) - g(\overline{x})}{g(x) \cdot g(\overline{x})} \\ &= H(x)(x - \overline{x}) \end{aligned}$$

mit $H(x) = -\frac{h(x)}{g(x) \cdot g(\overline{x})}$. H stetig in $\overline{x}$, $H(\overline{x}) = -\frac{Dg(\overline{x})}{g(\overline{x})^2}$. □

Satz 4.0.8 ***(Kettenregel)****:*
$f : X \to \mathbb{R}$ *linear approximierbar in* $\overline{x}$,
$g : Y \to \mathbb{R}$ *linear approximierbar in* $\overline{y}$,
so dass $f(X) \subset Y$, $f(\overline{x}) = \overline{y}$.
Dann ist $g \circ f$ *linear approximierbar in* $\overline{x}$ *und* $D(g \circ f)(\overline{x}) = Dg(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$.

EX: $a > 0$, $f(x) = a^{h(x)}$, h differenzierbar.
$Df(\overline{x}) = D(\exp \circ (\log a) h)(\overline{x}) = \log a \cdot Dh(\overline{x}) \cdot a^{h(\overline{x})}$.

Beweis der Kettenregel:
$f(x) = f(\overline{x}) + h(x)(x - \overline{x})$, h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = Df(\overline{x})$,
$g(y) = g(\overline{y}) + H(y)(y - \overline{y})$, H stetig in $\overline{y}$, $H(\overline{x}) = Dg(\overline{y})$.
$g \circ f(x) = g \circ f(\overline{x}) + H(f(x))h(x)(x - \overline{x})$.
$x \mapsto H(f(x))h(x)$ stetig in $\overline{x}$, $H(f(\overline{x})) \cdot h(\overline{x}) = Dg(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$ □

Folgerung 4.0.9 *:*
$f : X \to Y$ bijektiv, $\overline{x} \in X$ so dass

(1) Jeder Punkt von X bzw. Y ist Häufungspunkt von X bzw. Y,

(2) f linear approximierbar in $\overline{x}$, $Df(\overline{x}) \neq 0$,

(3) f^{-1} stetig in $\overline{y} := f(\overline{x})$.

Dann ist f^{-1} linear approximierbar in $\overline{y}$ und $D(f^{-1})(\overline{y}) = \frac{1}{Df(\overline{x})}$.

EX: $D(\arctan)(y) = \frac{1}{D\tan(x)} = \cos^2 x = \cos^2(\arctan\ y) = \frac{1}{1+y^2}$.

WARNUNG:

f differenzierbar $\underset{i.a.}{\not\Rightarrow}$ f^{-1} differenzierbar:
$f(x) = x^3$ differenzierbar, aber $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ nicht differenzierbar in $\overline{y} = 0$, wobei $\sqrt[3]{y} := -\sqrt[3]{|y|}$ für $y < 0$.

Beweis : Ist f^{-1} linear approximierbar in $\overline{y}$ so ist
$1 = D(id)(\overline{x}) = D(f^{-1} \circ f)(\overline{x}) = Df^{-1}(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$.
$f(x) - f(\overline{x}) = h(x)(x - \overline{x})$, h stetig in $\overline{x}$, $h(\overline{x}) = Df(\overline{x})$.
Da f injektiv, ist $h(x) \neq 0$ für alle $x \neq \overline{x}$.
$f^{-1}(y) - f^{-1}(\overline{y}) = x - \overline{x} = \frac{1}{h \circ f^{-1}(y)} \cdot (y - \overline{y}),\ y \neq \overline{y}$

$$y \mapsto H(y) := \begin{cases} \frac{1}{Df(\overline{x})} & y = \overline{y} \\ \frac{1}{h \circ f^{-1}(y)} & y \neq \overline{y} \end{cases}$$

ist stetig in $y = \overline{y}$. □

Definition 4.0.10 *:* 29/01/00
$\overline{x} \in X \subset \mathbb{R},\ f : x \to \mathbb{R}$

(1) *$\overline{x}$ innerer Punkt von X $:\Leftrightarrow$ Es gibt ein offenes Intervall I, so dass $\overline{x} \in I \subset X$.*

(2) *f hat ein lokales Maximum bzw. Minimum in $\overline{x}$ $:\Leftrightarrow$ Es gibt ein offenes Intervall J, so dass $\overline{x} \in J \subset X$ und $f(x) \leq f(\overline{x})$ bzw. $f(\overline{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in J$.*

Satz 4.0.11 *:*
$\overline{x} \in X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ linear approximierbar in $\overline{x}$, $Df(\overline{x}) > 0$.
Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

(1) $f(x) > f(\overline{x}),\ x \in X \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta)$

(2) $f(x) < f(\overline{x}),\ x \in X \cap (\overline{x} - \delta, \overline{x})$

Folgerung 4.0.12 *:*
Ist $\overline{x} \in X$ innerer Punkt und f ein lokales Extremum in $\overline{x}$, so ist $Df(\overline{x}) = 0$.

WARNUNG:

Das Verschwinden der Ableitung in einem inneren Punkt garantiert nicht, dass dort ein lokales Extremum vorliegt.
Gegenbeispiel: $x \mapsto x^3,\quad \overline{x} = 0$.

Folgerung 4.0.13 *:*
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f\big|(a, b)$ linear approximierbar,
$\underline{x}, \overline{x} \in [a, b]$ so dass $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$ für alle $x \in [a, b]$.
Dann gilt $\underline{x}, \overline{x} \in \{a, b\} \cup \{x \in (a, b) \mid Df(x) = 0\}$, d.h. $\underline{x}, \overline{x}$ sind Randpunkte des Intervalls oder Nullstellen der Ableitung.

Theorem 4.0.14 ***(Satz von der Rolle[1])***
$a < b,\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f\big|(a, b)$ linear approximierbar, $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass $Df(\xi) = 0$.

Folgerung 4.0.15 *:*
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, f, g linear approximierbar in (a, b), $Dg(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Insbesondere: $\qquad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$

[1] Michel Rolle (1652 - 1719), franz. Mathematiker

Beweis : Rolle: $g(b) - g(a) \neq 0$. Wende Rolle an auf

$$x \longmapsto F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

$\square$

Folgerung 4.0.16 *:*
$\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so dass f linear approximierbar in allen inneren Punkten von I.

äq

(i) $f \nearrow$

(ii) $Df \geq 0$.

Zusatz: Ist $Df > 0$, so ist f streng monoton steigend.

Beweis :
$(i) \Rightarrow (ii)$: ✓
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sonst gibt es $[x, y] \subset I, x < y$, so dass $f(x) > f(y)$, also $c \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = Df(c)(y - x) < 0$, d.h. $Df(c) < 0$.
Ist $f(x) = f(y)$ für $[x, y] \subset I,\ x < y$, so ist nach Rolle $Df(c) = 0$ für ein $x < c < y$. $\square$

Theorem 4.0.17 ***(MWS)***
$a < b,\ A \subset [a, b]$ höchstens abzählbar,
$g,\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig,
$g,\ f$ linear approximierbar in $[a, b] \setminus A$, so dass

$$|Df(x)| \leq Dg(x) \text{ für alle } x \notin A.$$

Dann ist $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Folgerung 4.0.18 *:*

äq

(i) *f konstant*

(ii) *$Df(x) = 0$ für alle $x \notin A$.*

Folgerung 4.0.19 *:*
$f : I \to \mathbb{R}$ *linear approximierbar,* $\lambda \in \mathbb{R}$

äq

(i) $Df = \lambda \cdot f$

(ii) $f(x) = f(\overline{x}) \cdot \exp(\lambda(x - \overline{x}))\,, \quad \overline{x} \in I$

Beweis des MWS:
Es genügt Folgendes zu zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a + 2).$$

$\mathbb{N} \twoheadrightarrow A,\ n \longmapsto x_n$, Surjektion.

$$M := \left\{ \tau \in [a,b] \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Für alle } a \leq x < \tau \ ist \\ |f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \sum\limits_{x_n < x} 2^{-n} \end{array} \right\}$$

Da $a \in M$, existiert $\overline{x} := sup\ M,\ a \leq \overline{x} \leq b.$
Außerdem: $\overline{x} \in M$,

$$\begin{aligned} |f(\overline{x}) - f(a)| &\leq g(\overline{x}) - g(a) + \varepsilon(\overline{x} - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\ &\leq g(\overline{x}) - g(a) + \varepsilon(\overline{x} - a + 2). \end{aligned}$$

1. Fall: $\overline{x} \notin A$:

$f(x) - f(\overline{x}) = h(x)(x - \overline{x})$
$g(x) - g(\overline{x}) = H(x)(x - \overline{x}),\ h, H$ stetig in $\overline{x}$,
$|h(\overline{x})| = |Df(\overline{x})| \leq Dg(\overline{x}) = H(\overline{x}).$
Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass
$|h(x)| \leq H(x) + \varepsilon$ für alle $x \in [a,b] \cap [\overline{x}, \overline{x} + \delta]$.
Sei $y \in [a,b] \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta]$ und $\overline{x} \leq x < y$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f(a)| \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < x} 2^{-n}, \end{aligned}$$

d.h. $y \in M$, ein Widerspruch.

2. Fall: $\overline{x} = x_m \in A$:

Da f, g stetig, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(\overline{x})|,\ \ |g(x) - g(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m},$$

insbesondere

$$g(\overline{x}) - \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} \leq g(x).$$

Sei $\overline{x} < x < y,\ \ y \in [a,b] \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta)$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + g(\overline{x}) - g(a) + \varepsilon(\overline{x} - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\
&\leq \varepsilon \cdot 2^{-m} + g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < \overline{x}} 2^{-n} \\
&\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \sum_{x_n < x} e^{-m},
\end{aligned}$$

d.h. $y \in M$, erneut ein Widerspruch. $\square$