Lösungen zum 5. Übungsblatt zur Analysis II

5.1: Seien $f_k,\ f \in V$ mit $f_k \underset{\|\ \|}{\longrightarrow} f$. Zu zeigen: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\widehat{f_k}(n) \longrightarrow \hat{f}$.
Beweis: Nach Aufg. 4.4 gilt $\|g\|_\infty \leq \|g\|$ für alle $g \in V$. Damit folgt für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}|\widehat{f_k}(n) - \hat{f}(n)| &= \left|\int_0^1 f_k(t)\chi_{-n}(t)dt - \int_0^1 f(t)\chi_{-n}(t)dt\right| = \left|\int_0^1 (f_k(t) - f(t)\chi_{-n}(t)dt\right| \\ &\leq \|f_k - f\|_\infty \cdot \|\chi_{-n}\|_\infty \cdot (1-0) \underset{4.4}{\leq} \|f_k - f\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

5.2: Sei $K := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. In $K^{n\times n}$ ist bekanntlich eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist (Gegenbeispiel: Aufg. 5.4(2) !)
a) Beh: $O(n)$ und $U(n)$ sind beschränkt in $(K^{n\times n}, \|\ \|_1)$.
Beweis: Sei $A := (a^1, \ldots, a^n) \in O(n)$ oder $\in U(n)$. Die a^k bilden ein ON-System, d.h. für $k = 1, \ldots, n$ gilt $1 = \|a^k\|_2 = \langle a^k | \overline{a^k}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^k \overline{a_i^k} \geq |a_i^k|$, $i = 1, \ldots, n$, also $\|A\|_\infty = \max_{i,k}|a_i^k| \leq 1$.
b) Beh: $O(n)$ und $U(n)$ sind abgeschlossen $\subset K^{n\times n}$.
Bew: Die Abbildung $\varphi : K^{n\times n} \longrightarrow K^{n\times n},\quad A = (a_i^k) \longmapsto A^*A$ ist stetig (da die n^2 Komponentenfunktionen φ_i^k stetig von den a_i^k, $i,k = 1, \ldots, n$ abhängen). Die einelementige Menge $\{E_n\} \subset K^{n\times n}$ ist abgeschlossen, und $O(n)$ (=Fall $K = \mathbb{R}$) bzw. $U(n)$ (=Fall $K = \mathbb{C}$) ist gleich $\varphi^{-1}(\{E_n\})$. $\Rightarrow O(n)$ und $U(n)$ sind abgeschlossen.
c) Beh: $O(n)$ ist nicht zusammenhängend, denn es gibt offene $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 \supset O(n)$ und $U_i \cap O(n) \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$.
Bew: Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ sind offene disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wähle $U_1 := \det^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A > 0\}$ und $U_2 := \det^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A < 0\}$. Dann sind $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ offen und disjunkt, U_1 enthält die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ und U_2 enthält alle $A \in O(n)$ mit $\det A = -1$.
Alternativer Beweis: Mit $O(n)$ wäre auch das Bild von $O(n)$ unter der stetigen Abbildung det zusammenhängend, also ein Intervall $\subset \mathbb{R}$. Aber dieses Bild besteht lediglich aus 2 Punkten.
d) Beh: $U(n) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ ist bogenweise zusammenhängend, also zusammenhängend.
Bew: Sei $A \in U(n)$. Wir zeigen, daß es in $U(n)$ einen Weg von E_n nach A gibt. Durch Komposition gibt es dann auch für je zwei $A, B \in U(n)$ innerhalb $U(n)$ einen Weg von A nach B.
A besitzt eine Darstellung $A = CDC^{-1}$ mit invertierbarem C und einer Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_k)$ derart, daß $\lambda_k \in S^1$ für alle $k = 1, \ldots, n$, also $\lambda_k = \exp(2\pi i t_k)$ mit einem geeigneten $0 \leq t_k < 1$. Für $0 \leq \mu \leq 1$ definiere $D_\mu := diag\big(\exp(2\pi i \mu t_k)\big) \in U(n)$ und $\varphi(\mu) := CD_\mu C^{-1}$. Die Abbildung $[0,1] \to U(n)$, $\mu \mapsto D_\mu$ ist stetig, da die Komponentenfunktionen stetig sind, also ist auch $\varphi : [0,1] \to U(n)$, $\mu \mapsto \varphi(\mu)$ stetig, und $\varphi(0) = E_n$, $\varphi(1) = A$.

5.3: Beweis durch Widerspruch. Annahme: $\overline{X}$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$, so dass

(1) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$,

(2) $U_1 \cup U_2 \supset \overline{X} \supset X$,

(3) $U_i \cap \overline{X} \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$.

Wäre $U_i \cap X \neq \emptyset$ für $i = 1$ und 2, so würde folgen, dass X nicht zusammenhängend ist, obwohl X doch per definitionem bogenweise zusammenhängend ist, ein Widerspruch.
Also gilt Œ $U_2 \cap X = \emptyset$, wegen (2) also $X \subset U_1$ und wegen (3) $\emptyset \neq U_2 \cap \overline{X} \subset \overline{X} \setminus X$. Jedes $y \in U_2 \cap \overline{X}$ ist also einerseits ein Häufungspunkt von X (weil $\in \overline{X} \setminus X$), andererseits ein innerer Punkt von U_2 (weil U_2 offen) $\Rightarrow$ In jeder ε-Umgebung von y liegen unendlich viele Punkte von X, andererseits gibt es eine ε-Umgebung von y, die ganz in U_2 liegt, also (wegen (1)) mit U_1 und erst recht mit $X \subset U_1$ einen leeren Durchschnitt hat, ein Widerspruch.

5.4:
(1) From LA I we know that $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$ is a norm on H, if $(f|g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ is a scalar product on H.
(S.1) (|) is linear in one component:

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + \mu f_2|g) &= \int_0^1 (\lambda f_1 + \mu f_2)(t)\overline{g(t)}dt = \lambda \int_0^1 f_1(t)\overline{g(t)}dt + \mu \int_0^1 f_2(t)\overline{g(t)}dt \\ &= \lambda(f_1|g) + \mu(f_2|g)\end{aligned}$$

(S.2) (|) is hermitian: $(g|f) = \int_0^1 g(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^1 \overline{f(t)\overline{g(t)}}dt = \overline{\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt} = \overline{(f|g)}$.
(S.3) $(f|f) > 0$ for all $f \in H \setminus \{0\}$: Suppose $f \in H \setminus \{0\}$, i.e. $f(t) \neq 0$ for at most one $\overline{t} \in [0,1]$. f continuous $\Rightarrow |f(t)| \geq C > 0$ on some non degenerate interval $\overline{t} \in [a,b] \subset [0,1] \Rightarrow (f|f) = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \geq \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq C^2(b-a) > 0$.
(S.1) - (S.3) $\Rightarrow$ (|) is a scalar product $\Rightarrow \| \ \|_2$ is a norm.
(2) K is bounded: $\|f\|_2 \leq 1$ for all $f \in K$.
K is closed: Let $(f_n) \subset K$, $f_n \underset{\| \|_2}{\longrightarrow} f \in H$. We have to show that $f \in K$.
$\|f\|_2 = \|(f - f_n) + f_n\|_2 \leq \|f - f_n\|_2 + \|f_n\|_2 \leq \|f - f_n\|_2 + 1$ for all n, as $f_n \in K$. By STAB $\|f\|_2 \leq \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 + 1 = 0 + 1 = 1$, i.e. $f \in K$.
K is not compact: $\|\chi_n\|_2 = 1$ for all $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\chi_n\right)_{n \geq 0} \subset K$. For $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ we have

$$\begin{aligned}\|\chi_n - \chi_m\|_2^2 &= (\chi_n - \chi_m|\chi_n - \chi_m) = (\chi_n|\chi_n - \chi_m) - (\chi_m|\chi_n - \chi_m) \\ &= (\chi_n|\chi_n) - (\chi_n|\chi_m) - (\chi_m|\chi_n) + (\chi_m|\chi_m) = 1 - 0 - 0 + 1 = 2,\end{aligned}$$

therefore no subsequence of (χ_n) can be convergent, because no subsequence is Cauchy. Hence K is not compact.
(3) We have to show that $(f_n, g_n) \to (f, g)$ in $H \times H$ implies (i.e. $\Rightarrow$) $(f_n|g_n) \to (f|g)$ in $\mathbb{C}$.
$(f_n|g_n) \to (f, g)$ in $H \times H \Rightarrow f_n \underset{\| \|_2}{\longrightarrow} g$ in H. Using the inequality of Cauchy-Schwarz for scalar products and the fact that $\|g_n - g\|_2 < 1$ for $n \gg 0$ implies $\|g_n\|_2 \leq \|g\|_2 + 1$ for $n \gg 0$, we obtain

$$\begin{aligned}\left|(f_n|g_n) - (f|g)\right| &= \left|(f_n|g_n) - (f|g_n) + (f|g_n) - (f|g)\right| \\ &\leq \left|(f_n|g_n) - (f|g_n)\right| + \left|(f|g_n) - (f|g)\right| \\ &= \left|(f_n - f|g_n)\right| + \left|(f|g_n - g)\right| \\ &\leq \|f_n - f\|_2 \cdot \|g_n\|_2 + \|f\|_2 \cdot \|g_n - g\|_2 \\ &\leq \|f_n - f\|_2 \cdot C_1 + C_2 \cdot \|g_n - g\|_2, \text{ with } C_1 := \|g\|_2 + 1,\ C_2 := \|f\|_2 \\ &\longrightarrow 0 \cdot C_1 + C_2 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

STAB $\Rightarrow \lim\left|(f_n|g_n) - (f|g)\right|$ exists and equals zero, i.e. $(f_n|g_n) \to (f|g)$ in $\mathbb{C}$.