

Grundlagen der Mathematik für Biologen

- Blatt 8 -

Abgabe: Montag, den 09.12.2013, vor der Vorlesung, spätestens 14:05 Uhr

Lektüreaufgabe: Skript Kap. 2.3, Kap. 5.1 und 5.2

Themen: Proportionalität bei Funktionen mehrerer Variabler, natürliche Wachstums- und Abbaugesetze, die momentane relative Änderungsrate $\frac{y'}{y}$, $y = \exp(x)$ und die allgemeinen Exponentialfunktionen.

1. Bei konstant gehaltenem Volumen V und variablen Temperaturen T im mittleren Bereich gilt für thermodynamische Systeme folgende Beziehung:

(*) Für alle kleinen Temperaturänderungen ΔT ist die Druckänderung Δp proportional zum bisherigen Druck p und zur Temperaturänderung ΔT .

Die positive Proportionalitätskonstante β heißt der **Spannungskoeffizient**.

- Übersetzen Sie die Aussage (*) in eine mathematische Formel. (2)
- Welche Aussage gilt für die momentane Änderungsrate dp/dT des Drucks bezüglich der Temperatur? (Mathematische Formel und deutscher Satz). (1)
- Genügt p als Funktion von T einem Wachstums- oder einem Abbaugesetz? Ist dieses linear oder natürlich oder keines von beiden? (mit Begründung) (1)
- Stellen Sie, wenn möglich, eine Berechnungsformel auf für p als Funktion von T (gültig für Temperaturen im mittleren Bereich). (1)

2. Laut Blatt 4, Nr. 2 gilt, dass in Blutgefäßen bei kleinen Änderungen des Innendrucks p die relative Volumenänderung proportional ist zur Änderung von p , wobei die positive Proportionalitätskonstante D die Dehnbarkeit des Gefäßes heißt.

- Genügt das Gefäßvolumen V als Funktion des Innendrucks p einem Wachstums- oder einem Abbaugesetz? Ist dieses linear oder natürlich oder keines von beiden? (mit Begründung) (1)
- Stellen Sie, wenn möglich, eine Berechnungsformel auf für V als Funktion von p . (1)

3. Sei $A \rightarrow$ Produkte eine chemische Reaktion 1. Ordnung, d.h. für die Reaktionsgeschwindigkeit

$$v = \left| \frac{d[A]}{dt} \right| \text{ gelte eine Gleichung } v = k \cdot [A].$$

- Folgern Sie hieraus, dass die Konzentration $[A]$ als Funktion der Zeit t einem natürlichen Abbaugesetz unterliegt. (1)
- Wie lautet demnach die Berechnungsformel für $[A]$ als Funktion von t ? (1)

4. Eine Studie aus dem Jahr 1913 über die Vermehrung von Hefezellen berichtete, dass nach dem Impfen einer bestimmten Nährlösung mit Hefezellen folgende Hefekonzentrationen $[H]$ gemessen wurden (in μl Hefe pro 10 ml Lösung):

t [h]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[H]	1,83	2,90	4,72	7,11	11,91	17,46	25,73	35,07	44,10	51,33	55,97	59,48

t [h]	13	14	15	16	17	18
[H]	62,94	64,08	65,11	65,59	65,96	66,18

- Skizzieren Sie den Graphen von $[H]$ als Funktion von t . (1)
- Berechnen Sie näherungsweise (jeweils mit 3 Nachkommastellen) in einer 3. und 4. Tabellenzeile die Geschwindigkeit $v = \frac{d[H]}{dt} = [H]'$ und die momentane relative Änderungsrate $\frac{[H]'}{[H]}$. (3)

c) Skizzieren Sie den Graphen von v als Funktion von $[H]$. (1)

d) Zeigen Sie graphisch, dass $\frac{[H]'}{[H]}$ als Funktion von $[H]$ durch eine fallende Gerade in allgemeiner

Lage modelliert wird: $\frac{[H]'}{[H]} = A - B \cdot [H]$ ($A > 0, B > 0$). (1)

5. Freiwillig, für Liebhaber und zum Punktesammeln: Die Funktion $y = x^3$ wächst für $x > 0$ bekanntlich sehr stark. $\frac{y'}{y}$ beschreibt ihre relative momentane Wachstumsrate (reine Zahl, in % umwandelbar).

a) Berechnen Sie die Einträge in folgender Wertetabelle ($\frac{y'}{y}$ in Prozent angeben): (3)

x	1	2	3	4	5	10	20	50	100	500	1000	2000	5000
y													
y'													
y'/y													

b) Wie verhält sich die momentane relative Wachstumsrate bei kleinem y und wie bei großem y ?
Kennen Sie ähnliche Phänomene bei Volkswirtschaften ($x = \text{Zeit}$, $y = \text{BIP}$)? (1)

Bedingungen für den Erwerb des Übungsscheines:

- Auf mindestens 11 Übungsblätter jeweils mindestens 6 Punkte erhalten, sowie insgesamt mindestens 100 Punkte.
Es sind 13 Übungsblätter mit jeweils mindestens 15 Punkten geplant, insgesamt mindestens 200 Punkte.
- Bestehen einer Klausur.

Klausurtermine:

1. Termin: Mo, 24.02.2014, 10:15 – 12:00, Hans-Meerwein-Str., Hörsaalgebäude Chemie, HS A + B
2. Termin: Do, 10.04.2014, 10:15 – 12:00, Hans-Meerwein-Str., Hörsaalgebäude Chemie, HS A

Proportionalität bei Funktionen mehrerer Variabler:

Ist $y = f(u, v, w, \dots)$ eine Funktion mehrerer freier Variabler u, v, w, \dots , können letztere voneinander unabhängige Werte annehmen und ist y proportional zu jeder einzelnen von ihnen, wenn nur diese variiert, so gibt es eine, von all diesen freien Variablen u, v, w, \dots unabhängige, funktionspezifische Konstante c , so dass gilt:

$$y = c \cdot u \cdot v \cdot w \dots$$

Natürliche Wachstums- und Abbaugesetze:

Die Funktion $y = f(x)$ erfüllt genau dann ein natürliches Wachstums- bzw. Abbaugesetz, wenn es eine funktionspezifische Konstante c gibt, so dass für alle kleinen Δx gilt

- $\Delta y \approx \pm c \cdot y \cdot \Delta x$
Gleichbedeutend sind folgende Formulierungen:
- $\frac{\Delta y}{y} \approx \pm c \cdot \Delta x$
- $y' = \pm c \cdot y$
- $\frac{y'}{y} = \pm c$, d.h. die momentane relative Änderungsrate von y ist konstant.

Es gilt $+c$ bei natürlichem Wachstum, $-c$ bei natürlichem Abbau.