

Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaftler

- Blatt 3 -

Abgabe: Mittwoch, den 02.05.2012, 12:10 Uhr vor der Vorlesung

Aufgabenblätter: Im Internet unter www.mathematik.uni-marburg.de/~lohoefer/

Wichtige Begriffe: Abstandsmessung zwischen Datenzeilen, mittlerer Fehler.

Mittelwert, Standardabweichung, Varianz und Variationskoeffizient einer Messreihe.

1. Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei folgenden Zahlenangaben:
 - a) Die Stadt S hat 3,6 Millionen Einwohner. (1)
 - b) Der Konzern K beschäftigt weltweit 23 Tausend Arbeitnehmer. (1)
 - c) Die universelle Gaskonstante hat den Wert $R = 8,3144 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. (1)
2. Runden Sie folgende Dezimalzahlen auf den Wert x und bestimmen Sie danach jeweils den **relativen** Fehler (in %) von x:
 - a) $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ auf 4 Nachkommastellen, (1)
 - b) $\pi = 3,141592654\dots$ auf 2 Nachkommastellen, (1)

3. Bei homogener Beschaffenheit eines Stoffes gilt zwischen Masse m und Volumen V bekanntlich Proportionalität, d.h. eine Formel $m = c \cdot V$, wobei die Konstante c die Dichte des Stoffes genannt wird. Fünf Proben eines Gesteins ergaben folgende **verbundene Messreihe**:

X=V[cm ³]	0,25	0,5	0,75	1	5
Y=m[g]	0,8	1,8	2,7	3,4	21,3

Mit der Formel $m = c \cdot V$ bzw. $Y = c \cdot X$ ergibt sich die folgende theoretische Datenzeile:

$Y_{\text{Formel}} = m_{\text{Formel}}$	$c \cdot 0,25$	$c \cdot 0,5$	$c \cdot 0,75$	$c \cdot 1$	$c \cdot 5$
---	----------------	---------------	----------------	-------------	-------------

Drei Methoden zur Schätzung der Konstanten c (auf 1 Nachkommastelle gerundet):

- a) **Optimale Methode:** Berechnen Sie denjenigen Wert von c, für den die **Summe der Fehlerquadrate** S zwischen der empirischen und der theoretischen Datenzeile für m minimal wird (d.h. dass die Funktion S(c) dort ihr Minimum annimmt). Nennen Sie diesen Wert C. (3)
Bemerkung: C ist derjenige Schätzwert für die gesuchte Proportionalitätskonstante c, die den **mittleren Fehler** (4 Nachkommastellen) zwischen den empirischen m_i und den $m_{i \text{ Formel}}$ ($i = 1, \dots, n$) minimiert.
 - b) **Grobe Methode 1:** Berechnen Sie aus den Quotienten $c_i = \frac{y_i}{x_i}$ den Mittelwert $\bar{c} = \frac{1}{n} \cdot \sum \left(\frac{y_i}{x_i} \right)$. (1)
 - c) **Grobe Methode 2:** Berechnen Sie aus den Mittelwerten \bar{x} und \bar{y} den Quotienten $\hat{c} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$. (1)
 - d) Tragen Sie die fünf Punkte $(V_i | m_i)$ als Kreuzchen in ein Koordinatensystem ein, dazu die drei Ursprungsgeraden mit den Steigungen C (durchgezogene Linie), \bar{c} (kurz gestrichelte Linie) bzw. \hat{c} (lang gestrichelte Linie). (2)
4. Bei der praktischen Berechnung der **Standardabweichung** s mittels der Formel $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

macht die Summe der Fehlerquadrate $\sum (x_i - \bar{x})^2$ ziemlich viel Arbeit: Es sind zuerst n Differenzen zu bilden, danach n Quadrate und dann eine Summe mit n Summanden, das sind n-1 Additionen, also insgesamt 3n-1 Operationen. Die Zahl der Rechenschritte wird erheblich reduziert, wenn man folgende Gleichung ausnutzt:

$$(*) \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2$$

$$\text{Im Detail: } (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - n \cdot \bar{x}^2.$$

Rechnen Sie nach, dass diese Gleichung stimmt. (Tipp: $\sum x_i = n \cdot \bar{x}$) (3)

Bemerkung: Die rechte Seite von (*) erfordert viel weniger Rechenschritte als die linke Seite, andererseits entstehen meist größere Quadratzahlen als links. **Bei Berechnung der Standardabweichung ohne Computer entscheidet man sich je nach Einzelfall für die linke oder die rechte Seite von (*).**

Bedingungen für die erfolgreiche Teilnahme:

- Regelmäßige Teilnahme an der Vorlesung (maximal 2 mal Fehlen).
- Auf mindestens 9 Übungsblätter jeweils mindestens 5 Punkte erhalten, insgesamt jedoch mindestens 75 Punkte. Es sind 11 Übungsblätter mit jeweils mindestens 15 Punkten geplant.
- Dazu das Bestehen einer Klausur.

Klausurtermine:

1. Klausur: Do, 19.07.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS A + B
2. Klausur: Do, 11.10.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS B

Begriffe und Regeln:

$d = \sqrt{\frac{(x_i - y_i)^2}{n}}$ misst den **Abstand zwischen zwei Datenzeilen** (x_1, x_2, \dots, x_n) und (y_1, y_2, \dots, y_n) .

Dies ist zugleich der **mittlere Fehler** / die mittlere Abweichung zwischen den n Datenpaaren x_i und y_i ($i = 1, \dots, n$).

Regel: Ist x_1, x_2, \dots, x_n eine Messreihe und x irgendeine Konstante, so heißt $\sqrt{\frac{(x_i - x)^2}{n}}$ die mittlere Abweichung zwischen den x_i und der Konstante x . **Es gibt genau eine Zahl x , für die diese mittlere Abweichung minimal ist, und das ist der Mittelwert $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.** **Regel 3/1**

Die mittlere Abweichung $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ zwischen den Daten x_i einer Messreihe und deren Mittelwert \bar{x} heißt die **Standardabweichung**, auch die **Streuung** oder der **mittlerer Fehler der Messreihe**. Einheit von s = Einheit von x_i ($i = 1, \dots, n$)

Das Quadrat der Standardabweichung. $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ heißt die **Varianz** der Messreihe.

Beachte: Im Allgemeinen gilt: Sind die Messdaten sehr kleine Zahlen, so ist auch die Standardabweichung recht klein, liegen die Messdaten im Bereich sehr großer Zahlen, so ist auch die Standardabweichung ziemlich groß. Eine von dieser Abhängigkeit befreite, relative Standardabweichung

erhält man durch das Größenverhältnis $\frac{s}{\bar{x}}$ zwischen der Standardabweichung s und dem Mittelwert \bar{x}

der Messreihe. Der Quotient $\frac{s}{\bar{x}}$ (= reine Zahl) heißt der **Variationskoeffizient** der Messreihe.