

**Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaftler**

- Blatt 6 -

Abgabe: Mittwoch, den 30.05.2012, 12:10 Uhr vor der Vorlesung

**Skript und Aufgabenblätter:** Im Internet unter [www.mathematik.uni-marburg.de/~lohoefer/](http://www.mathematik.uni-marburg.de/~lohoefer/)

**Lektürehinweis:** Skript Kap 1.2.3, 1.2.4, 9.3.1, 9.3.2, 10.1

**Wichtige Begriffe:** Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen  $E_1, \dots, E_n$ , Binomialkoeffizienten, Binomialverteilung,  $\chi^2$ -Anpassungstest.

1. Von den Veranstaltern eines Kongresses wurden 631 Zimmer der Kategorie A bereitgehalten. Nur 627 Buchungsaufträge gingen tatsächlich ein.  
Wie viele Milliarden Möglichkeiten (1 Nachkommastelle) gibt es, von den 631 Zimmern insgesamt 627 zur Belegung auszuwählen?  
Tipp: Genau 4 Zimmer müssen frei gelassen werden. (3)

2. Von 100 Reisenden in ein bestimmtes tropisches Land ziehen sich durchschnittlich 9 eine gewisse Darminfektion zu.  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in %, 1 Nachkommastelle), dass sich von einer Gruppenreise in dieses Land mit 38 Teilnehmern  
a) höchstens 3 Personen infizieren? (3)  
b) mindestens 4 Personen infizieren? (1)

Ü. Hierzulande sind 51% aller Neugeborenen männlich. Wie hoch ist die Chance, (in %, 1 Nachkommastelle), dass eine Familie, die sich 4 Kindern wünscht, genau 2 Jungen und 2 Mädchen bekommt?

3. Falls (!) beim selben Elternpaar die Jungen- und Mädchengeburt stochastisch unabhängig aufeinander folgen, so ist die Anzahl  $X$  der Jungen in Familien mit  $n$  Kindern binomialverteilt. (Für  $E =$  Jungengeburt gilt  $p = p(E) = 0,51$ .)

Im 19. Jahrhundert gab es in Deutschland noch sehr viele kinderreiche Familien. Eine Studie von 1889 ermittelte die Anzahl von Jungen in lauter Familien mit 8 Kindern. Hier die Daten:

$E_i =$ Anzahl Jungen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$H_i =$ Anzahl Familien	22	150	536	1072	1504	1200	672	210	34
$p_i = p(E_i)$									
$N_i = n \cdot p_i$									

- a) Überprüfen Sie mit dem  $\chi^2$ -Anpassungstest die Nullhypothese  
 $H_0 =$  „Die Anzahl der Jungen in Familien mit acht Kindern ist binomialverteilt.“  
Antwort, wenn möglich, mit Angabe der Sicherheit bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit.  
Hinweis: Berechnen Sie zunächst alle  $p_i$  (3 Nachkommastellen) und  $N_i$  ( $i = 0, \dots, 8$ ). (8)
- b) Bestätigt das Ergebnis in a) die Annahme, dass die Geschlechterfolge bei Kindern desselben Elternpaares stochastisch unabhängig ist? Antwort, wenn möglich, mit Angabe der Sicherheit bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit. (1)

**Bedingungen für die erfolgreiche Teilnahme:**

- Regelmäßige Teilnahme an der Vorlesung (maximal 2 mal Fehlen).
- Auf mindestens 9 Übungsblätter jeweils mindestens 5 Punkte erhalten, insgesamt jedoch mindestens 75 Punkte. Es sind 11 Übungsblätter mit jeweils mindestens 15 Punkten geplant.
- Dazu das Bestehen einer Klausur.

**Klausurtermine:**

1. Klausur: Do, 19.07.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS A + B  
2. Klausur: Do, 11.10.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS B

### Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

n Ereignisse  $E_1, E_2, \dots, E_n$  heißen

- „stochastisch unabhängig“, wenn  $p(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \dots \cdot p(E_n)$
- „positiv korreliert“, wenn  $p(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) > p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \dots \cdot p(E_n)$
- „negativ korreliert“, wenn  $p(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) < p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \dots \cdot p(E_n)$

### Gleichverteilung

Eine Variable  $X$  liefere stets genau eines der Messergebnisse  $E_1, E_2, \dots, E_r$ .  $X$  heißt „gleichverteilt“, falls gilt:

$$p(E_1) = p(E_2) = \dots = p(E_r) = p$$

Wegen  $p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_r) = 1$  gilt dann  $p = \frac{1}{r}$ .

### Binomialverteilung

Sei  $E$  ein mögliches Ergebnis einer Messung / eines Experiments. Sei  $p = p(E)$  die Wahrscheinlichkeit von  $E$ . Wird dieses Experiment  $n$  mal durchgeführt, und ist  $E_i$  das Ergebnis der  $i$ -ten Messung, so gilt entweder  $E_i = E$  oder  $E_i = \bar{E}$ . **Wenn (!) die Ergebnisse  $E_1, E_2, \dots, E_n$  bei  $n$ -facher Durchführung stochastisch unabhängig sind, dann gilt:**

Die Anzahl  $X$ , mit der das Ergebnis  $E$  bei  $n$ -facher Durchführung des Experiments auftritt, ist eine ganzzahlige Variable, welche die Werte  $k = 0, 1, \dots, n$  annehmen kann. Dabei berechnet sich für  $k = 0, 1, \dots, n$  die Wahrscheinlichkeit  $p(k) = P(X = k)$  wie folgt:

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \quad X \text{ heißt in diesem Fall „binomialverteilt“.}$$

Erwartungswert von  $X$ :  $\lambda = n \cdot p$

Standardabweichung von  $X$ :  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Varianz von  $X$ :  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis  $E$  bei  $n$  Messungen

- höchstens  $b$  mal auftritt, ist

$$P(k \leq b) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} + \dots + \binom{n}{b} \cdot p^b \cdot (1-p)^{n-b}$$

- mindestens  $a$  mal auftritt, ist

$$P(a \leq k) = \binom{n}{a} \cdot p^a \cdot (1-p)^{n-a} + \binom{n}{a+1} \cdot p^{a+1} \cdot (1-p)^{n-a-1} + \binom{n}{a+2} \cdot p^{a+2} \cdot (1-p)^{n-a-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^0$$

- mindestens  $a$  und höchstens  $b$  mal auftritt, ist

$$P(a \leq k \leq b) = \binom{n}{a} \cdot p^a \cdot (1-p)^{n-a} + \binom{n}{a+1} \cdot p^{a+1} \cdot (1-p)^{n-a-1} + \binom{n}{a+2} \cdot p^{a+2} \cdot (1-p)^{n-a-2} + \dots + \binom{n}{b} \cdot p^b \cdot (1-p)^{n-b}$$