

Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaftler

- Blatt 7 -

Abgabe: Mittwoch, den 06.06.2012, 12:10 Uhr vor der Vorlesung

Skript und Aufgabenblätter: Im Internet unter www.mathematik.uni-marburg.de/~lohoefer/

Lektürehinweis: Skript Kap 9.2, 10.1

Wichtige Begriffe: Poissonverteilung, Poissonverteilung anstelle von Binomialverteilung bei seltenen Ereignissen, χ^2 -Anpassungstest.

1. Ein Vulkan breche durchschnittlich alle 100 Jahre einmal aus. Wie hoch ist das Risiko (in %, 1 Nachkommastelle), dass er in einem Jahrhundert mindestens zweimal ausbricht? (2)
2. Entlang dem Flusslauf in einer dünnbesiedelten Region ist durchschnittlich auf 200 km eine Ansiedlung zu erwarten.
Ein verirrter Rucksacktourist ohne GPS trifft auf diesen Flusslauf und folgt ihm auf gut Glück in einer Richtung. Wie groß ist seine Chance (in %, 2 Nachkommastellen), dass er auf den nächsten 25 Kilometern mindestens eine Ansiedlung erreicht? Tipp: Erst Erwartungswert für 25 km bestimmen. (2)
3. Bei den Vertragshotels eines Tourismuskonzerns am Ferienort A kommt durchschnittlich eine juristisch ausgetragene Reklamation auf 1000 Buchungen.
Wie hoch ist die Chance (in %, 1 Nachkommastelle), dass in einer Saison bei insgesamt 6000 Buchungen höchstens 3 derartige Reklamationen auftreten? (3)
4. Ist die Anzahl X der Heimtore pro Bundesligaspiel poissonverteilt? Eine Auswertung aller Bundesligaspiele der Spielzeit 1980/81 ergab folgende Daten:

k Heimtore	0	1	2	3	4	5	6	$7 \leq k < \infty$
H_k	43	74	87	51	31	14	5	0
$p_k = p(k)$								
$N_k = n \cdot p_k$								

- a) Bestimmen Sie die Gesamtzahl n aller Spiele. (0,5)
- b) Bestimmen Sie die Gesamtzahl aller Heimtore sowie die durchschnittliche Anzahl \bar{x} von Heimtoren pro Spiel (2 Nachkommastellen). (1)
- c) Unterstellen Sie, dass $\lambda = \bar{x}$ ist (Schätzwert!), und berechnen Sie damit die bei Poissonverteilung auftretenden Wahrscheinlichkeiten p_k (3 Nachkommastellen), ($k = 0, \dots, 6$) sodann die daraus theoretisch zu erwartenden Häufigkeiten $N_k = n \cdot p_k$. Hinweis: Die Zahlen in der letzten Tabellenspalte ergeben sich mittels der Formeln $\sum p_k = 1$ und $\sum n \cdot p_k = n$. (3)
- d) Wenden Sie danach den χ^2 -Anpassungstest an. (Achtung: Die letzten beiden Merkmalsklassen müssen zunächst noch zu einer zusammengefasst werden, damit die Bedingung $N_k \geq 5$ erfüllt ist.) Testergebnis, wenn möglich, mit Angabe der Sicherheit bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit. (3,5)

Bedingungen für die erfolgreiche Teilnahme:

- Regelmäßige Teilnahme an der Vorlesung (maximal 2 mal Fehlen).
- Auf mindestens 9 Übungsblätter jeweils mindestens 5 Punkte erhalten, insgesamt jedoch mindestens 75 Punkte. Es sind 11 Übungsblätter mit jeweils mindestens 15 Punkten geplant.
- Dazu das Bestehen einer Klausur.

Klausurtermine:

1. Klausur: Do, 19.07.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS A + B
2. Klausur: Do, 11.10.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS B

Poissonverteilung

Besteht eine Messung daraus, die Anzahl k gewisser Objekte oder Ereignisse pro **Raum-** oder **Zeiteinheit** zu zählen, und sind diese Objekte oder Ereignisse räumlich und/oder zeitlich **rein zufällig verteilt**, so ist die Anzahl X pro Messung eine ganzzahlige Variable, welche alle Werte $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (nach oben nicht beschränkt!) annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit $p(k) = P(X = k)$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad X \text{ heißt in diesem Fall „poissonverteilt“.}$$

Dabei ist λ der Erwartungswert (= Durchschnittswert) für die Anzahl X bezogen auf Räume oder Zeitspannen der betrachteten Größe.

Standardabweichung von X : $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl Objekte/Ereignisse pro Messung

- höchstens gleich b ist, ist

$$P(k \leq b) = \sum_{k=0}^b \left(\frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^b}{b!} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

- mindestens gleich a ist, ist

$$P(a \leq k) = 1 - P(0 \leq k \leq a-1) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{a-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} = 1 - \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^{a-1}}{(a-1)!} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

- mindestens gleich a und höchstens gleich b ist, ist

$$P(a \leq X \leq b) = \left(\sum_{k=a}^b \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} = \left(\frac{\lambda^a}{a!} + \frac{\lambda^{a+1}}{(a+1)!} + \dots + \frac{\lambda^b}{b!} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

Unterschiede zwischen Binomial- und Poissonverteilung:

Bei der Binomialverteilung tritt das Ereignis E pro Messung immer nur 0 oder 1 mal auf. k mal tritt es dann auf, wenn man n mal misst. Daher ist k mindestens gleich 0 und höchstens gleich n .

Bei der Poissonverteilung wird bei einer einzigen Messung schon k -faches Auftreten von E gezählt. k ist mindestens gleich 0, kann aber unbegrenzt groß werden.

Schätzformel für seltene Ereignisse (Ersetzung der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung)

Es liege ein Fall von Binomialverteilung vor mit folgenden Besonderheiten: E sei ein seltenes Ereignis ($p \leq 0,05 = 5\%$, besser noch $p \leq 0,01 = 1\%$) und die Anzahl n der Messungen sei groß ($n \geq 100$).

Unter diesen Bedingungen ist die Berechnung der Binomialverteilung oft recht arbeitsaufwendig, manchmal sogar praktisch nicht durchführbar (evtl. wenn $n \geq 1000$), Dann entsteht aber nur eine geringe Ungenauigkeit, wenn man ersatzweise mit der Poissonverteilung rechnet, denn es gilt dann die Schätzformel

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{wobei } \lambda = n \cdot p,$$

und diese Schätzung wird umso besser, je kleiner p und je größer n ist.