Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Dr. Helga Lohöfer

Sommersemester 2012

Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaftler

- Blatt 9 -

Abgabe: Mittwoch, den 20.06.2012, 12:10 Uhr vor der Vorlesung

Skript und Aufgabenblätter: Im Internet unter www.mathematik.uni-marburg.de/~lohoefer/
Lektürehinweis: Skript „Mathematische und statistische Methoden" Kap. 10.2
Wichtige Begriffe: Stochastische Unabhängigkeit von zwei Variablen mit je endlich vielen Ereignisklassen, χ^2-Unabhängigkeitstest.

1. 120 Studenten nahmen jeweils an einer Statistik- und an einer Mathematikklausur teil mit folgenden Ergebnissen:

	Statistik bestanden	Statistik nicht bestanden
Mathematik bestanden	60	10
Mathematik nicht bestanden	20	30

Besteht zwischen dem Bestehen beider Klausuren ein Zusammenhang? Wenn ja, mit welcher Sicherheit? (4)

2. Vor einer Wahl machte Meinungsforschungsinstitut A eine repräsentative Umfrage unter 1000 Wahlberechtigten, welche der kandidierenden Parteien sie zu wählen beabsichtigen. Institut B machte zum gleichen Zeitpunkt eine repräsentative Umfrage unter 800 Wahlberechtigten. Die Auswertung erbrachte folgendes Ergebnis für die regierenden Koalitionsparteien:

	regierende Koalitionsparteien	sonstige Antworten
Institut A	450	550
Institut B	309	491

Testen Sie die Nullhypothese H_0, dass die Umfrageergebnisse unabhängig von den beiden Instituten waren. Antwort, wenn möglich, mit Angabe der Sicherheit bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit. (4)

3. Drei Monate vor einer Wahl machte ein Meinungsforschungsinstitut eine repräsentative Umfrage unter 1000 Personen, welche der kandidierenden Parteien sie zu wählen beabsichtigen. 7 Tage vor der Wahl stellte das Institut dieselben Fragen rasch noch mal 500 repräsentativ ausgesuchten Personen. Es ergaben sich folgende Werte:

Partei	A	B	C	D	Sonstige	weiß nicht	Nichtwähler
1. Umfrage	464	271	75	39	15	27	109
2. Umfrage	208	176	30	16	7	13	50

Stimmt die Nullhypothese, dass die Wählermeinung unabhängig vom Befragungstermin war, oder hat vom einen bis zum anderen Umfragetermin eine Änderung der Wählermeinung stattgefunden? Antwort, wenn möglich, mit Angabe der Sicherheit bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit. (7)

Bedingungen für die erfolgreiche Teilnahme:

- Regelmäßige Teilnahme an der Vorlesung (maximal 2 mal Fehlen).
- Auf mindestens 9 Übungsblätter jeweils mindestens 5 Punkte erhalten, insgesamt jedoch mindestens 75 Punkte. Es sind 11 Übungsblätter mit jeweils mindestens 15 Punkten geplant.
- Dazu das Bestehen einer Klausur.

Klausurtermine:

1. Klausur: Do, 19.07.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS A + B
2. Klausur: Do, 11.10.12, 11:00 – 12:45, Hörsaalgebäude Chemie Lahnberge, Hans-Meerwein-Str., HS B

Der χ^2-Unabhängigkeitstest:

Gegeben zwei Variable X, Y. Die Variable X habe r Ereignisklassen, Y habe m Ereignisklassen.
Nullhypothese: H_0 = „Die Variablen X und Y sind stochastisch unabhängig."

1. Schritt: Bilde eine „Kontingenztafel" mit r Zeilen für die Ereignisklassen $E_1,\dots, E_r$ von X und m Spalten für die Ereignisklassen $E_1',\dots, E_m'$ von Y, trage alle absoluten Häufigkeiten H_{ik} ein, berechne die r Zeilensummen Z_i ($i = 1,\dots, r$), und m Spaltensummen S_k ($k = 1, \dots, m$). Die Probe muss $n = \Sigma Z_i = \Sigma S_k$ ergeben. **Sichere**, dass alle $H_{ik} \geq 5$ sind (notfalls mehrere Ereignisklassen zu einer zusammenfassen).

2. Schritt: Berechne in einer zweiten Tabelle alle $\frac{Z_i S_k}{n}$.

3. Schritt: Berechne anhand beider Tabellen die **Prüfgröße**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(H_{ik} - \frac{Z_i \cdot S_k}{n}\right)^2}{\frac{Z_i \cdot S_k}{n}}\right)$$

sowie den **Freiheitsgrad** $f = (r-1)\cdot(m-1)$.

(Hinweis: Summiert wird über alle Summanden der Bauart $\frac{\left(H_{ik} - \frac{Z_i \cdot S_k}{n}\right)^2}{\frac{Z_i \cdot S_k}{n}}$ mit $i = 1,\dots, r$ und $k = 1, \dots, m$ (das sind insgesamt $r\cdot m$ Summanden).

4. Schritt: Für $f = (r-1)\cdot(m-1)$ schlage in der **χ^2-Tabelle** nach und vergleiche χ^2 mit tab-χ^2(95%).

Auswertung: Ist $\chi^2 >$ tab-χ^2(95%), so ist die Nullhypothese der stochastischen Unabhängigkeit von X und Y mit 95% Sicherheit (d.h. 5% Irrtumswahrscheinlichkeit) falsch und wird abgelehnt. Analog für höhere Prozentzahlen.
Ist $\chi^2 \leq$ tab-χ^2(95%), so wird die Nullhypothese angenommen (keine Sicherheit angebbar).

Zusatz: **Im Spezialfall r = m = 2 (d.h. Vierfeldertafel)** ist f = 1 und die Prüfgröße errechnet sich einfach zu

$$\chi^2 = \frac{n\cdot\left(H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}\right)^2}{Z_1 Z_2 S_1 S_2}$$