

Anhang zu Kap. 5.11: Der Doppler-Effekt und seine medizinische Anwendung

Ein Sender produziere eine Schallwelle der konstanten Frequenz f_0 , welche sich in einem homogenen Medium mit einer konstanten Schallgeschwindigkeit c ausbreite. Befindet sich ein Schallempfänger in konstantem räumlichen Abstand zur Schallquelle, so registriert er auch einen Schall der Frequenz f_0 . Ändert sich jedoch der räumliche Abstand zwischen Sender und Empfänger mit der konstanten Geschwindigkeit v ($v > 0$ bei Annäherung, $v < 0$ bei Entfernung), so registriert der Empfänger einen Schall anderer Frequenz f . Die Frequenzverschiebung

$\Delta f = f - f_0$ wird bekanntlich **Doppler-Effekt** genannt.

Falls die Geschwindigkeit v , mit der Sender und Empfänger ihren Abstand verändern, höchstens $\pm 7\%$ der Schallgeschwindigkeit c beträgt (wenn also $v = a \cdot c$ ist mit $|a| \leq 0,07$), so beträgt die relative Frequenzänderung den gleichen Prozentsatz, d.h. es gilt:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = a \text{ bzw. } \Delta f = a \cdot f_0, \text{ wobei } a = \frac{v}{c}.$$

Das bedeutet konkret z.B.: Bei Annäherung von Sender und Empfänger mit einer Geschwindigkeit von 5% der Schallgeschwindigkeit registriert der Empfänger eine um 5% erhöhte Frequenz (der Ton wird höher), bei ebenso rascher Entfernung eine um 5% niedrigere Frequenz (der Ton wird tiefer).

Eine medizinische Anwendung des Doppler-Effekts: **Messung der Strömungsgeschwindigkeit v des Blutes** (zwecks Auffindung von krankhaften Strömungszuständen, z.B. Blockaden mit $v = 0$):

Parallel zu einem blutdurchflossenen Gefäß, aber entgegengesetzt zur Strömungsrichtung, wird Ultraschallstrahlung der Frequenz f_0 ausgestrahlt (z.B. $f_0 = 2$ MHz). Die Ultraschallwelle wird an den im Blut mitgeführten Teilchen (z.B. Erythrozyten) teilweise rückgestreut, und die rückgestreute Schallwelle wird am Ort des Senders von einem geeignet damit zusammengebauten Empfänger gemessen. Dabei gilt Folgendes:

1. Die Schallgeschwindigkeit in Blut ist ungefähr wie die in Wasser, d.h. $c = 1483 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Der Abstand zwischen den reflektierenden Blutpartikeln (= beweglicher Schallempfänger) und dem (feststehenden) Ultraschallsender verringert sich mit der Blutfließgeschwindigkeit $v > 0$, diese beträgt sicher weniger als $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, das sind etwa 7% von c , also gilt die Bedingung $v = a \cdot c$ mit $0 < a \leq 0,07$. Damit tritt am Reflektionspunkt eine positive Frequenzverschiebung (Doppler-Effekt) auf:

$$f_1 - f_0 = a \cdot f_0, \quad (1)$$

d.h. die Schallwelle erreicht die reflektierenden Partikel mit der Frequenz f_1 .

2. Dank der Reflektion werden die Partikel ihrerseits zum (beweglichen) Sender: Die Welle der Frequenz f_1 wird durch die Blutbahn wieder zurückgeschickt zum Ultraschallmessgerät (= feststehender Empfänger), der Abstand zwischen Sender und Empfänger verringert sich wiederum mit Blutfließgeschwindigkeit $v > 0$, am Messgerät tritt daher eine zweite positive Frequenzverschiebung (Doppler-Effekt) auf:

$$f_2 - f_1 = a \cdot f_1. \quad (2)$$

Insgesamt liegt damit am Messpunkt zwischen gesendetem und wiederempfangenem Ultraschall die positive Frequenzdifferenz $f_2 - f_0$ vor, die man

$$\text{als Ton der Frequenz } f_3 = f_2 - f_0$$

messen und i.a. auch hören kann (liegt nicht mehr im Ultraschallbereich).

Die Blutfließgeschwindigkeit v ermittelt man aus den bekannten Daten f_3 , f_0 und c wie folgt:

$$f_3 = f_2 - f_0 = (f_2 - f_1) + (f_1 - f_0) \stackrel{(2),(1)}{=} a \cdot f_1 + a \cdot f_0 = a \cdot (f_1 - f_0) + 2a \cdot f_0 \stackrel{(1)}{=} a \cdot a \cdot f_0 + 2a \cdot f_0 = (a^2 + 2a) \cdot f_0$$

Wegen $a \leq 0,07$ gilt $a^2 \leq 0,0049$ und damit ist a^2 , auf 2 Nachkommastellen gerundet, ≈ 0 und $a^2 + 2a \approx 2a$. Somit erhält man durch Runden und Einsetzen von $a = v/c$:

$$f_3 \approx 2a \cdot f_0 = 2 \frac{v}{c} \cdot f_0$$

Daraus kann man v freistellen und erhält

$$v \approx \frac{f_3}{2} \cdot \frac{c}{f_0},$$

wobei die Differenz-Frequenz f_3 gemessen ist und die Schallgeschwindigkeit c sowie die Sendefrequenz f_0 im Voraus bekannt sind.

Zahlenbeispiel: Ist die Differenz-Frequenz z.B. $f_3 = 2697,2$ Hz (hörbar), so folgt aus $f_0 = 2$ MHz und $c = 1483 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ folgende Blutfließgeschwindigkeit im untersuchten Gefäß:

$$v \approx \frac{2697,2 \text{ Hz}}{2} \cdot \frac{1483 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 10^6 \text{ Hz}} \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Generell gilt: Je kleiner die Fließgeschwindigkeit v , umso kleiner der Prozentsatz a , umso kleiner der Dopplereffekt Δf , also umso tiefer der hörbare Ton f_3 . Ist keinerlei Differenzfrequenz f_3 messbar, so ist auf $v = 0$ zu schließen (= Gefäßverstopfung).