

Kapitel 6

Integralrechnung

6.1 Das bestimmte Integral

6.1.1 Das Windrad-Beispiel

Ein privat betriebenes Windrad sei mit dem überregionalen Stromnetz verbunden. An der Netzschnittstelle sitze ein Messgerät, welches laufend die (schwankende) elektrische Leistung $P[\text{kW}]$ misst, und zwar positiv, wenn privater Strom in das Netz eingespeist wird, negativ, wenn aus dem Netz Strom an die Privatperson abfließt. (Die umgekehrte Vorzeichenkonvention wäre genauso gut brauchbar.)

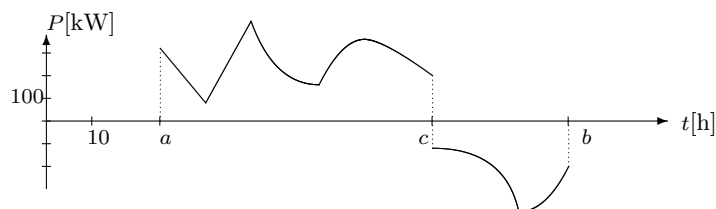
Entscheidend ist, dass die Variable P als Funktion der Zeit t positive und negative Werte in beliebigem Wechsel annehmen kann.

1. Variante: Das Messgerät misst für den Abrechnungszeitraum $a \leq t \leq b$ im Minuten- oder Sekundentakt und druckt während dieser Zeitspanne eine **Wertetabelle** aus für die Variablen $t[\text{h}]$ und $P[\text{kW}]$:

$t[\text{h}]$	$t_0 = a$	\dots	t_{i-1}	t_i	t_{i+1}	\dots	$t_n = b$
$P[\text{kW}]$	$P_0 = P(a)$	\dots	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	\dots	$P_n = P(b)$

2. Variante: Das Messgerät misst während des Abrechnungszeitraums $a \leq t \leq b$ permanent und druckt auf Endlospapier die Leistungskurve, d.h. den **Graph** von P als Funktion von t . Durch plötzliches Zu- und Abschalten von elektrisch betriebenen Großgeräten, Windböen bzw. Flauten u.ä. kann diese Leistungskurve Knicke und endlich viele Sprünge haben.

*Das bedeutet mathematisch: P als Funktion von t braucht **nicht differenzierbar** zu sein und darf auch einzelne **Unstetigkeitsstellen** besitzen (hier im Beispiel: bei $t = c$.)*



Aufgabe: Zu Abrechnungszwecken soll für den Zeitraum $a \leq t \leq b$ die Gesamtarbeit W [kWh] berechnet werden, wobei angenommen werde, dass der Netzbetreiber dem Windradbesitzer für 1kW genauso soviel zahlt, wie er umgekehrt für dieselbe Menge von ihm fordert.

*Das bedeutet mathematisch: Es wird eine **Gesamtsumme** gebildet, bei der Plus und Minus, Soll und Haben sich gegenseitig aufheben können.*

Die Grundregel für die Berechnung lautet:

$$\text{Arbeit} = \text{Leistung mal Zeit, d.h. } W[\text{kWh}] = P[\text{kW}] \cdot t[\text{h}].$$

Problem: Diese einfache Formel unterstellt Konstanz der Leistung während der Gesamtzeit. Genau diese Voraussetzung ist hier nicht erfüllt: P ist eine Variable und Funktion der Zeit.

Lösungsansatz im Falle einer vorliegenden Wertetabelle: Da die Wertetabelle eine kleine Schrittweite Δt besitzt, kann man annehmen, dass P in der kleinen Zeitspanne $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ungefähr konstant ist, wobei die Tabelle als Näherungswerte P_{i-1} und P_i anbietet. Daraus errechnet sich als **bestmögliche Schätzung** für P der Mittelwert

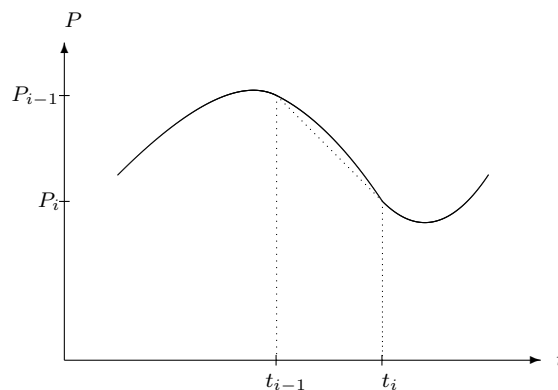
$$P \approx \frac{P_{i-1} + P_i}{2}$$

und das liefert als **bestmögliche Schätzung** für W die

Elementare Trapezregel am Beispiel:

$$W \approx \frac{P_{i-1} + P_i}{2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad \text{für alle **kleinen** } \Delta t = t_i - t_{i-1}. \quad (6.1)$$

Der Name dieser Regel erklärt sich geometrisch: Die Formel liefert, falls P_{i-1} und P_i beide positiv sind, gerade den Flächeninhalt des folgenden Trapezes:



Da der Graph von P als Funktion von t sich im Bereich $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ nur wenig von der Geraden durch die Punkte $(t_{i-1}|P_{i-1})$ und $(t_i|P_i)$ unterscheidet, (= Prinzip der Interpolation¹), ist der Trapezinhalt auch ungefähr gleich dem Flächeninhalt, den dieser Graph im Bereich $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ mit der waagerechten Achse einschließt.

¹siehe 2.2.4, S.19

Das alles gilt **nur für kleine** Δt , wird aber immer präziser, je kleiner Δt ist. Genauer gilt: Der Fehler bei der näherungsweise Berechnung von W mit der elementaren Trapezregel (6.1) strebt gegen Null, wenn $\Delta t \rightarrow 0$.

Einen Näherungswert von W für die gesamte Zeitspanne $a \leq t \leq b$ bekommt man nun durch Aufsummieren sämtlicher Näherungswerte für die kleinen Zeitspannen $t_{i-1} \leq t \leq t_i$:

Trapezregel (am Beispiel von P als Funktion von t):

$$W \approx \frac{P_0+P_1}{2} \cdot (t_1 - t_0) + \frac{P_1+P_2}{2} \cdot (t_2 - t_1) + \dots + \frac{P_{n-1}+P_n}{2} \cdot (t_n - t_{n-1})$$

kurz: $W \approx \sum_{i=1}^n \frac{P_{i-1}+P_i}{2} \cdot (t_i - t_{i-1}),$

wobei die Summanden teils positiv, teils negativ sein können.

Sind die P -Werte alle positiv, so gibt dies zugleich auch ungefähr die Fläche an, die der Graph von P als Funktion von t im Bereich $a \leq t \leq b$ mit der waagerechten Achse einschließt. Andernfalls ist es ungefähr die Summe der eingeschlossenen Flächen oberhalb der waagerechten Achse **minus** die Summe der eingeschlossenen Flächen unterhalb der waagerechten Achse. Die ungefähre Gleichheit strebt gegen exakte Gleichheit, wenn die Schrittweiten Δt der Wertetabelle gegen 0 streben. Damit erhalten wir auch den

Lösungsansatz im Falle eines vorliegenden Graphen: Es muss der Flächeninhalt aller eingeschlossenen Flächen oberhalb sowie unterhalb der waagerechten Achse technisch bestimmt werden, dann muss die Summe der Flächeninhalte unterhalb der Achse subtrahiert werden von der Summe der Flächeninhalte oberhalb der Achse. Das Ergebnis ist $\approx W$.

6.1.2 Das bestimmte Integral und seine numerische Berechnung

Derartige aus Wertetabellen oder Graphen gebildete Summen treten in Anwendungen sehr oft auf. Der Mittelwert $\bar{P}_i = \frac{P_{i-1}+P_i}{2}$ in der Berechnungsformel könnte auch (allerdings in weniger guter Näherung!) durch irgendeinen beliebigen Messwert von P ersetzt werden, der im Bereich $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ gemessen wurde, also durch einen Wert $\bar{P}_i = P(\tilde{t}_i)$ mit $t_{i-1} \leq \tilde{t}_i \leq t_i$.

Bezeichnung: Seien a, b zwei Zahlen im Wertebereich der Variablen x (nicht notwendig a kleiner als b) und sei $y = f(x)$ eine Funktion von x , welche im Bereich zwischen a und b bis auf endlich viele Sprünge stetig ist. Seien x_i endlich viele nach Größe sortierte Zwischenwerte, d.h. gelte

im Falle $a \leq b$: $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$

bzw. im Falle $a \geq b$: $a = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n = b.$

(Die Schrittweite $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ darf unterschiedlich groß sein für $i = 1, \dots, n$.)

Sei weiterhin $\bar{y}_i = f(\tilde{x}_i)$ ein Funktionswert mit \tilde{x}_i zwischen x_{i-1} und x_i oder sei $\bar{y}_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}$ (=Mittelwert), dann heisst

$$S = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

eine Riemannsches² Summe von $y = f(x)$ im Abschnitt zwischen a und b . Die größte der n Schrittweiten $|\Delta x| = |x_i - x_{i-1}|$ heißt der **Feinheitsgrad** δ der Summe.

²Bernhard Georg Friedrich Riemann (1826 - 1866), deutscher Mathematiker

Regel 52 (Das bestimmte Integral als Grenzwert):**R 52**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ (nicht notwendig $a < b$) und $y = f(x)$ eine im Bereich zwischen a und b bis auf endlich viele Sprünge stetige Funktion (mit beliebig wechselndem Vorzeichen). Bildet man eine unendliche Folge S_1, S_2, S_3, \dots von Riemannschen Summen von y im Abschnitt zwischen a und b ,

$$S_k = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \text{ mit jeweiligem Feineitsheitsgrad } \delta_k \quad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

(wobei für jede Summe S_k die Größen n, x_i, \bar{y}_i neu gewählt werden), so besitzt diese Folge von Summen S_1, S_2, S_3, \dots stets einen Grenzwert $\hat{S} = \lim S_k$, **wenn** nur die Folge der Feineitsheitsgrade $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ gegen Null strebt.

Der Zahlwert von $\hat{S} = \lim S_k$ hängt nicht von der speziellen Konstruktion der Summen ab, sondern nur von $y = f(x)$ und den Konstanten a und b , und heißt **das bestimmte Integral von a bis b über ydx (oder: über $f(x)dx$)**.

$$\text{Unterrichts-Schreibweise: } \int_a^b f(x)dx \quad \text{Anwender-Schreibweise: } \int_a^b ydx.$$

Die Funktion f bzw. die Variable y heißt in diesem Zusammenhang **der Integrand**, die Konstante a die **untere Integrationsgrenze** und die Konstante b die **obere Integrationsgrenze**. (Beachte, dass die untere Integrationsgrenze im Wert größer als die obere sein darf.)

Zusatz: Für Berechnungszwecke ist es erlaubt, den Namen der freien Variablen x beliebig durch einen anderen Buchstaben zu ersetzen (solange damit nicht eine echte andere Variable gemeint ist), d.h. es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(u)du \quad \text{usw.}$$

Da der Grenzwert einer Folge sich von allen späten Folgengliedern nur wenig unterscheidet, erhalten wir sofort ein Verfahren zur praktischen Berechnung bestimmter Integrale:

Regel 57 (Numerische Integration mit der Trapezregel):**R 57**

Soll das bestimmte Integral $\int_a^b ydx$ berechnet werden und ist eine möglichst engmaschige und nach x -Werten auf- oder absteigend sortierte **Wertetabelle** für $y = f(x)$ im Bereich zwischen a und b gegeben (wobei $a = x_0, b = x_n$ zu setzen ist), so ist der bestmögliche Näherungswert für das Integral gegeben durch

$$\int_a^b ydx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Dies ist die allgemeine Fassung der Trapezregel, die im Windrad-Beispiel schon für den Spezialfall $x = t[h]$ und $y = P[kW]$ formuliert wurde.³

³siehe 6.1.1, S.129

Besitzt man von $y = f(x)$ keine Wertetabelle, sondern nur einen durch ein geeignetes Messinstrument aufgezeichneten Graphen, so macht man sich den Zusammenhang zwischen Wert des bestimmten Integrals und Fläche unter dem Graphen zunutze⁴ sowie die Tatsache, dass die Fläche eines Stücks Papier proportional zu ihrem Gewicht ist:

Graphische Integration:

Es sei die untere Integrationsgrenze a kleiner als die obere b .

Soll das bestimmte Integral $\int_a^b y dx$ berechnet werden und ist keine Wertetabelle, aber ein möglichst präzise hergestellter **Graph** von $y = f(x)$ im Abschnitt von a bis b gegeben, so verfährt man wie folgt:

1. Schritt: Die zwischen dem Graphen und der x -Achse im Bereich $a \leq x \leq b$ eingeschlossene Fläche schneidet man sorgfältig aus dem Papier aus.
Dabei zerfällt die Fläche ggf. in mehrere Teilflächen A_+ über und Teilflächen A_- unter der x -Achse.
2. Schritt: Durch Wiegen mit einer Präzisionswaage bestimmt man
- das Gesamtgewicht G_+ aller Teilflächen A_+ über der x -Achse sowie
- das Gesamtgewicht G_- aller Teilflächen A_- unter der x -Achse.
3. Schritt: Zum Vergleich schneidet man eine Rechtecksfläche bekannter Größe A_\square (z.B.: 100 (im x -Achsenmaßstab) mal 10 (im y -Achsenmaßstab)) aus, misst ihr Papiergewicht G_\square und errechnet daraus das Gewicht G_{norm} der Einheitsfläche $A_{norm} = 1$:

$$G_{norm} = \frac{G_\square}{A_\square}.$$

4. Schritt: Jetzt berechnet man (dimensionslos)

$$\int_a^b y dx \approx \frac{G_+ - G_-}{G_{norm}}.$$

6.1.3 Umformungsregeln für bestimmter Integrale

Da der Bereich $a \leq x \leq b$ zusammen mit dem Bereich $b \leq x \leq c$ den Bereich $a \leq x \leq c$ ergibt, und da im Falle $b < a$ die Differenzen $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ alle negativ sind, folgt

Regel 53 (Regeln für die Integrationsgrenzen bestimmter Integrale):

R 53

$$(I.1) \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

$$(I.2) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

$$(I.3) \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Aus der Bauart der Riemannschen Summen folgt beim Grenzübergang mittels der Allgemeinen Grenzwertregeln (G.1) - (G.3)⁵

⁴siehe das Windrad-Beispiel 6.1.1, S.129

⁵siehe 3.3.3, S.34

Regel 54 (Faktorregel):**R 54**

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Regel 55 (Summenregel):**R 55**

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

Ist $x = g(z)$ seinerseits eine monoton wachsende oder fallende und **differenzierbare** Funktion von z und $x_i = g(z_i)$ ($i = 0, \dots, n$), sowie \tilde{x}_i zwischen x_{i-1} und x_i mit $\tilde{x}_i = g(\tilde{z}_i)$, so sind die z_i, \tilde{z}_i genauso oder umgekehrt der Größe nach sortiert wie die x_i, \tilde{x}_i und es gilt⁶: $x_i - x_{i-1} \approx g'(\tilde{z}_i) \cdot (z_i - z_{i-1})$. Insbesondere strebt $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ genau dann gegen 0, wenn auch $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ dies tut. Setzt man dies in die Riemannschen Summen ein (wobei $\bar{y}_i = f(\tilde{x}_i)$) und nennt noch $z_0 = \alpha$, $z_n = \beta$, so folgt

$$S = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n f(g(\tilde{z}_i)) \cdot g'(\tilde{z}_i) \cdot (z_i - z_{i-1}),$$

und letztere Summe ist eine Riemannsche Summe von $f(g(z)) \cdot g'(z)$ im Abschnitt zwischen α und β . Das führt beim Grenzprozess $\Delta x \rightarrow 0$ bzw. $\Delta z \rightarrow 0$ zu

Regel 56 (Substitutionsregel):**R 56**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(z))g'(z)dz = \int_a^b f(x)dx.$$

Beispiel zur Substitutionsregel: $\int_2^3 \exp(3z^2)6zdz = \int_{12}^{27} \exp(x)dx$ (mit $x = g(z) = 3z^2$).

Die *Regeln 53 bis 56* liefern - außer im trivialen Falle von (I.3) - keinerlei Handhabe zum Ausrechnen von bestimmten Integralen, sondern lediglich Möglichkeiten, ein (unausgerechnetes) Integral umzuformen und durch andere (ebenso unausgerechnete) Integrale auszudrücken, mit der Zielrichtung, kompliziert gebaute Integrale durch einfacher gebaute zu ersetzen.

Die Bestimmung des Zahlwerts eines Integrals geschieht in der Praxis in rund 99% aller Fälle **näherungsweise** durch numerische Integration gemäß *Regel 57*.⁷

Eine **exakte** Berechnung des bestimmten Integrals mit dem sog. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung⁸ gelingt nur bei solchen Funktionen $y = f(x)$, für die eine Berechnungsformel existiert und für die - oft erst nach Anwendung der *Regeln 53 bis 56* - zusätzlich eine Stammfunktion bekannt ist. Dabei ist die Existenz einer Berechnungsformel in der Praxis schon selten genug, in der Wissenschaftstheorie eher häufig anzutreffen. Die Existenz einer Stammfunktion dagegen ist auch in der Theorie eher die Ausnahme.

⁶siehe 4.3.1, S.46

⁷siehe 6.1.2, S.130

⁸siehe unten 6.4, S.138

6.1.4 Anwendung: Der Begriff des mittleren (durchschnittlichen) Wertes einer Funktion $y = f(x)$ im Bereich $a \leq x \leq b$

Beispiel 1: Die mittlere Leistung des Windrades im Zeitraum $a \leq t \leq b$:

Wird im Windrad-Beispiel⁹ die variable Leistung $P[\text{kW}]$ über den Zeitraum $a \leq t \leq b[\text{h}]$ gemessen, so ergibt sich die Gesamtarbeit W bekanntlich als das bestimmte Integral

$$W = \int_a^b P dt [\text{kWh}].$$

Die **mittlere Leistung** P_{mitt} während desselben Zeitraums erhält man, indem man die Gesamtarbeit $W[\text{kWh}]$ durch die Zeitspanne $b - a$ [h] dividiert:

$$P_{\text{mitt}} = \frac{W}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b P dt \quad (6.2)$$

Beispiel 2: Die mittlere Temperatur an einem Ort im Zeitraum $a \leq t \leq b$:

Die Celsiustemperatur ϑ an einem Ort kann zwischen Plus- und Minusgraden schwanken, die Durchschnittstemperatur ϑ_{mitt} in einem 24-Stunden-Zeitraum (z.B.) solle berechnet werden. Hat man etwa folgende fünf Messungen gemacht:

$t[\text{h}]$	0	5	12	16	24
$\vartheta[^\circ\text{C}]$	-5	-10	8	12	0

so ist es **falsch**, einfach das arithmetische Mittel aller 5 Messwerte $\bar{\vartheta} = \sum \vartheta_i / 5 = 1[^\circ\text{C}]$ zu berechnen: Indem man in der kalten Nacht häufiger, am warmen Nachmittag aber seltener misst (oder umgekehrt), kann man den Zahlwert des arithmetischen Mittels beliebig nach unten oder oben manipulieren!

Vielmehr muss man Temperaturwerte ermitteln, deren (evtl. unterschiedliche) Gültigkeitsdauer man angeben kann, und diese Werte gemäß ihrer Gültigkeitsdauer gewichten. Wie lange jeder einzelne Temperaturwert aus der Tabelle gültig war, ist nicht feststellbar. Aber es gilt:

- Von 0 bis 5 Uhr herrschte eine Durchschnittstemperatur von $\approx \bar{\vartheta}_1 = \frac{(-5)+(-10)}{2} = -7,5$ Grad, und dieser Zeitraum hat an 24 Stunden den Anteil $a_1 = \frac{5-0}{24}$,
- von 5 bis 12 Uhr herrschte eine Durchschnittstemperatur von $\approx \bar{\vartheta}_2 = \frac{-10+8}{2} = -1$ Grad, zeitlicher Anteil: $a_2 = \frac{12-5}{24}$
- von 12 bis 16 Uhr herrschte eine Durchschnittstemperatur von $\approx \bar{\vartheta}_3 = \frac{8+12}{2} = 10$ Grad, zeitlicher Anteil: $a_3 = \frac{16-12}{24}$,
- von 16 bis 24 Uhr herrschte eine Durchschnittstemperatur von $\approx \bar{\vartheta}_4 = \frac{12+0}{2} = 6$ Grad, zeitlicher Anteil: $a_4 = \frac{24-16}{24}$.

Wie in der Mischungsrechnung setzt sich nun der Gesamtwert ϑ_{mitt} aus diesen $\bar{\vartheta}_i$ gemäß ihren prozentualen Anteilen additiv zusammen: $\vartheta_{\text{mitt}} = \bar{\vartheta}_1 \cdot a_1 + \bar{\vartheta}_2 \cdot a_2 + \bar{\vartheta}_3 \cdot a_3 + \bar{\vartheta}_4 \cdot a_4$, in Zahlen:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{mitt}} &\approx -7,5 \cdot \frac{5-0}{24} + (-1) \cdot \frac{12-5}{24} + 10 \cdot \frac{16-12}{24} + 6 \cdot \frac{24-16}{24} \\ &\approx \frac{(-5)+(-10)}{2} \cdot \frac{5-0}{24} + \frac{-10+8}{2} \cdot \frac{12-5}{24} + \frac{8+12}{2} \cdot \frac{16-12}{24} + \frac{12+0}{2} \cdot \frac{24-16}{24} = 1,8125 \end{aligned}$$

⁹siehe 6.1.1, S.127

Bezeichnet man die 5 Zeitwerte in der Wertetabelle aufsteigend mit $a = t_0 = 0$ bis $b = t_4 = 24$, die entsprechenden Temperaturwerte mit ϑ_0 bis ϑ_4 , so liest sich diese Rechnung wie folgt:

$$\begin{aligned}\vartheta_{\text{mitt}} &\approx \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} \cdot \frac{t_1 - t_0}{b - a} + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{b - a} + \frac{\vartheta_2 + \vartheta_3}{2} \cdot \frac{t_3 - t_2}{b - a} + \frac{\vartheta_3 + \vartheta_4}{2} \cdot \frac{t_4 - t_3}{b - a} \\ &= \frac{1}{b - a} \cdot \left(\frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} \cdot (t_1 - t_0) + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \cdot (t_2 - t_1) + \frac{\vartheta_2 + \vartheta_3}{2} \cdot (t_3 - t_2) + \frac{\vartheta_3 + \vartheta_4}{2} \cdot (t_4 - t_3) \right)\end{aligned}$$

Dies ist noch eine grobe Näherung, aber wenn man die zeitlichen Abstände $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ der Messungen verkleinert, also über denselben Zeitraum $a \leq t \leq b$ mehr Daten sammelt, und dann die entsprechende Rechnung durchführt, wird das Ergebnis zwar rechenaufwendiger, aber auch immer präziser, für $\Delta t \rightarrow \infty$ erhält man den exakten Wert von ϑ_{mitt} . Andererseits ist die Summe in großen Klammern nach *Regel 57*¹⁰ ein Näherungswert für das bestimmte Integral von $a = 0[h]$ bis $b = 24[h]$ über ϑdt und strebt für $\Delta t \rightarrow \infty$ gegen dieses Integral. Damit gilt:

$$\vartheta_{\text{mitt}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b \vartheta dt \quad (6.3)$$

An beiden Beispielen erkennt man bei Betrachtung von (6.2) und (6.3) den allgemeinen Fall:

Durchschnittlicher Wert einer Variablen $y = f(x)$ im Bereich $a \leq x \leq b$:

Sind $a < b$ zwei Zahlen im Wertebereich der Variablen x und ist die Variable y eine Funktion von x , so errechnet sich der **mittlere (durchschnittliche) Wert von y** im Bereich von a bis b mittels der Formel

$$y_{\text{mitt}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b y dx \quad (6.4)$$

Beachte: Die Bedeutung von y_{mitt} erklärt sich erst im Bezug auf einen bestimmten, endlichen Gültigkeitsbereich $a \leq x \leq b$.

Weitere Beispiele:

- Die mittlere Niederschlagsmenge an einem bestimmten Ort, bezogen auf einen langjährigen Zeitraum $a \leq t \leq b$ [Jahre],
- der mittlere Pegelstand eines Flusses gemessen an einem bestimmten Ort, bezogen auf einen Sommerzeitraum $a \leq t \leq b$ [Monate] eines bestimmten Jahres,
- der mittlere Pegelstand eines Flusses, gemessen an einem bestimmten Datum, bezogen auf einen Streckenabschnitt $a \leq x \leq b$ [km],
- die mittlere Steigung einer Straße, bezogen auf einen Streckenabschnitt $a \leq x \leq b$ [km],
- der mittlere Kurswert einer Währung, bezogen auf einen Zeitraum $a \leq t \leq b$ [Wochen].

¹⁰siehe 6.1.2, S.130

6.2 Stammfunktionen

Wie in *Regel 11*¹¹ nachzulesen, gilt die folgende

Bezeichnung: Ist $y = f(x)$ die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $u = F(x)$, so heißt $u = F(x)$ eine Stammfunktion von $y = f(x)$.

Regel 58 (Regeln für Stammfunktionen):

R 58

- (S.1) Ist $u = F(x)$ eine Stammfunktion von $y = f(x)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so ist auch $u_c = F(x) + c$ eine Stammfunktion von $y = f(x)$.
Insbesondere hat eine Funktion entweder gar keine oder unendlich viele Stammfunktionen.
- (S.2) Zwei Stammfunktionen $u_1 = F_1(x)$ und $u_2 = F_2(x)$ zur selben Funktion $y = f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $u_2(x) = u_1(x) \pm c$ für alle Werte von x , oder kurz:

$$u_1 - u_2 = c \text{ (const).}$$

- (S.3) Wenn zwei Stammfunktionen $u_1 = F_1(x)$ und $u_2 = F_2(x)$ zur selben Funktion $y = f(x)$ an irgendeiner Stelle x_0 im Wert übereinstimmen, so stimmen sie in allen Funktionswerten überein.

Beweis von Regel 58:

Zu (S.1): Ist $u = F(x)$ Stammfunktion von $y = f(x)$, so gilt $u' = F'(x) = f(x) = y$. Daraus folgt

$$u'_c = (F(x) + c)' \stackrel{(D.1)}{=} F'(x) + c' \stackrel{\text{Regel 12}}{=} f(x) + 0 = y,$$

also ist y die Ableitung von u_c nach x und somit $u_c = F(x) + c$ ebenfalls Stammfunktion von $y = f(x)$.

Zu (S.2): Sind $u_1 = F_1(x)$ und $u_2 = F_2(x)$ zwei Stammfunktionen von $y = f(x)$, so folgt

$$(u_2 - u_1)' \stackrel{(D.1)}{=} u'_2 - u'_1 = f(x) - f(x) = 0 \text{ für alle } x,$$

d.h. die Variable $u = u_1 - u_2$ ist als Funktion von x eine Gerade mit Steigung 0, also $= \text{const.}$

Zu (S.3): Nach (S.2) gilt $u_2 - u_1 = c$ (const). Einsetzen von x_0 liefert $c = u_2(x_0) - u_1(x_0) = 0$, also $u_2(x) = u_1(x)$ für alle x -Werte. \square

6.3 Summatorische Funktionen zu einer Funktion $y = f(x)$

Wieder zum Windradbeispiel: Ist $P(t)$ die zum Zeitpunkt t momentan stattfindende Leistung, so bezeichne $W(t)$ die seit dem Zeitpunkt der Installation des Windrades oder irgendeinem anderen Anfangszeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t **insgesamt** geleistete Arbeit (negative und positive gegeneinander verrechnet!).

¹¹siehe 4.3.2, S.47

Bezeichnung: $W(t)$ heißt eine zu $P(t)$ gehörige **summatorische Funktion**. Sie hängt noch ab von der Wahl des Anfangszeitpunkts t_0 und hat an diesem den Wert $W = 0$. Für $t \neq t_0$ ist $W(t)$ auszurechnen durch das bestimmte Integral von t_0 bis t über P .

Mit Hilfe einer solchen Funktion läßt sich die innerhalb einer **beliebigen großen** Zeitspanne $a \leq t \leq b$ geleistete Arbeit schreiben als

$$(1) \quad W(b) - W(a) = \int_a^b P(t) dt.$$

Für **kleine** Zeitspannen $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ hingegen gilt einfach $W(t_i) - W(t_{i-1}) \approx P(\tilde{t}_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$, kurz

$$\Delta W \approx P \cdot \Delta t.$$

Mit *Regel 11*¹² folgt:

- (2) P ist die momentane Änderungsrate von W bezüglich t , d.h. $u = W(t)$ besitzt die Ableitung $u' = P(t)$, und $u = W(t)$ ist eine Stammfunktion von $y = P(t)$.

Nun vom Beispiel zur allgemeinen Theorie. Gestützt auf *Regel 52*¹³ erhalten wir:

Bezeichnung: Ist $y = f(x)$ eine bis auf einzelne Sprünge stetige Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl in ihrem Definitionsbereich D_f , so existiert zu jedem $x \in D_f$ das bestimmte Integral $\int_{x_0}^x f(x) dx$ und ist durch x eindeutig im Wert bestimmt, also eine Funktion von x . Die so konstruierte Funktion

$$S(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

heißt eine **summatorische Funktion zu $y = f(x)$ mit dem Anfangswert $S(x_0) = 0$** .

Bessere Lesbarkeit erzielt man, wenn man die Integrationsvariable durch einen beliebig geänderten Buchstaben bezeichnet, z.B. $S(x) = \int_{x_0}^x f(z) dz$ oder $S(x) = \int_{x_0}^x f(u) du \dots$

6.3.1 Wichtige Beispiele von summatorischen Funktionen

Die Beispiele für Ableitungen in 4.3.3¹⁴ liefern zugleich Beispiele für summatorische Funktionen:

Beispiel 1: Bezeichnet $v(t)$ die variable Geschwindigkeit eines bewegten Körpers zum Zeitpunkt t und $s(t)$ die seit einem beliebigen Anfangszeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t insgesamt zurückgelegte Entfernung, so gilt für alle kleinen Zeitspannen $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ die Formel $\Delta s = v \cdot \Delta t$, genauer:

$$s_i - s_{i-1} \approx v(\tilde{t}_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (6.5)$$

Zerlegt man die beliebig lange Zeitspanne von t_0 bis t in n kleine aufeinanderfolgende Zeitspannen t_0 bis t_1 , t_1 bis t_2 , \dots , t_{i-1} bis t_i , \dots , t_{n-1} bis t_n , so erhält man n Gleichungen vom Typ (6.5), durch Aufsummieren der kleinen Wegstrecken also die Gesamtwegstrecke:

¹²siehe 4.3.2, S.47

¹³siehe 6.1.2, S.130

¹⁴siehe S.47

$$\begin{aligned}
s(t) &= (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \dots + (s_i - s_{i-1}) + \dots + (s_n - s_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1}) \\
&\approx \sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&\approx \int_{t_0}^t v(t) dt
\end{aligned}$$

Mit $\Delta t \rightarrow 0$ strebt die ungefähre Gleichheit gegen exakte Gleichheit. Damit gilt

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt,$$

d.h. $s(t)$ ist eine summatorische Funktion zur Funktion $v(t)$, die für den willkürlich gewählten Anfangswert t_0 den Wert $s = 0$ hat. Nach *Regel 11* war $s(t)$ außerdem eine Stammfunktion von $v(t)$.

Beispiel 2: Bezeichnet $I(t)$ die variable Stromstärke zum Zeitpunkt t und $Q(t)$ die seit einem beliebigen Anfangszeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t insgesamt geflossene Ladung, so gilt für kleine Zeitspannen Δt die Formel $\Delta Q \approx I \cdot \Delta t$, genauer:

$$Q_i - Q_{i-1} \approx I(\tilde{t}_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Durch Aufsummieren über viele kleine aufeinanderfolgende Zeitspannen erhält man durch eine ganz analoge Rechnung

$$Q(t) = \int_{t_0}^t I(t) dt,$$

d.h. $Q(t)$ ist eine summatorische Funktion zur Funktion $I(t)$, die für den willkürlich gewählten Anfangswert t_0 den Wert $Q = 0$ hat. Nach *Regel 11* war $Q(t)$ außerdem eine Stammfunktion von $I(t)$.

Beispiel 3: Bezeichnet $F(t)$ die variable Kraft, die eine geradeaus rollende Kugel zum Zeitpunkt t treibt und $p(t)$ den Impuls seit einem beliebigen Anfangszeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t , so gilt für kleine Zeitspannen Δt die Formel $\Delta p \approx F \cdot \Delta t$, und daraus folgt durch Summieren

$$p(t) = \int_{t_0}^t F(t) dt,$$

d.h. $p(t)$ ist eine summatorische Funktion zur Funktion $F(t)$, die für den willkürlich gewählten Anfangswert t_0 den Wert $p = 0$ hat. Nach *Regel 11* war $p(t)$ außerdem eine Stammfunktion von $F(t)$.

Beispiel 4: Wird ein Körper geradlinig bewegt, bezeichnet $F(x)$ die variable Kraft, die am Ort x auf ihn einwirkt, sowie $W(x)$ die Arbeit, die insgesamt geleistet wurde, um ihn von einem beliebigen Anfangspunkt x_0 bis zum Ort x zu bewegen, so gilt für kleine Ortsveränderungen Δx die Formel $\Delta W \approx F \cdot \Delta x$, und daraus folgt durch Summieren

$$W(x) = \int_{x_0}^x F(x) dx,$$

d.h. $W(x)$ ist eine summatorische Funktion zur Funktion $F(x)$, die für den willkürlich gewählten Anfangswert x_0 den Wert $W = 0$ hat. Nach *Regel 11* war $W(x)$ außerdem eine Stammfunktion von $F(x)$.

6.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Alle oben aufgeführten konkreten Beispiele von summatorischen Funktionen zu einer gegebenen Funktion hatten die Eigenschaft, dass sie eine Stammfunktion zu dieser Funktion waren. Sind Stammfunktionen und summatorische Funktionen dasselbe? Nein, aus mehreren Gründen:

- Es gibt summatorische Funktionen, die keine Stammfunktionen sind:
Auch Funktionen mit Sprüngen besitzen summatorische Funktionen¹⁵. Diese summatorischen Funktionen sind aber i.a. stellenweise nicht differenzierbar. Alle Stammfunktionen sind hingegen differenzierbar, denn sie besitzen ja diejenige Funktion als Ableitung, deren Stammfunktion sie sind.
- Es gibt Stammfunktionen, die keine summatorischen Funktionen sind:
Man nehme eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$, die keine Nullstelle besitzt, z.B. $y = \exp(x)$ oder $y = 1 + x^2$. Da jede summatorische Funktion an ihrem Anfangswert x_0 den Wert $y = 0$ hat, kann $y = f(x)$ keine summatorische Funktion sein, weil ohne Nullstelle. Trotzdem ist $y = f(x)$ sicher eine Stammfunktion zu $z = f'(x)$.

Welche engen theoretischen Zusammenhänge zwischen Stammfunktionen, summatorischen Funktionen und bestimmten Integralen trotzdem existieren, formuliert der wohl berühmteste Satz der Analysis überhaupt:

Regel 59 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

R 59

Vorausgesetzt sei, dass $y = f(x)$ eine **stetige** Funktion ist (keine Sprünge, aber nicht notwendig differenzierbar).

- a) Ist x_0 irgendeine Zahl im Definitionsbereich von f und ist u_0 eine beliebige reelle Konstante, so besitzt $y = f(x)$ genau eine Stammfunktion $u = F(x)$ mit dem Anfangswert $F(x_0) = u_0$.

Diese **Stammfunktion** lässt sich erforderlichenfalls **mittels bestimmter Integrale** über $y = f(x)$ **berechnen** nach der Formel

$$(1) \quad F(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Insbesondere ist die summatorische Funktion zu $y = f(x)$ mit dem Anfangswert x_0 auch eine Stammfunktion von $y = f(x)$, (setze $u_0 = 0$).

- b) Ist von der Funktion $y = f(x)$ irgendeine beliebige (!) Stammfunktion $w = F(x)$ bekannt, so lässt sich das **bestimmte Integral** von a bis b über $f(x)dx$ **mittels der Stammfunktion exakt (!) berechnen** nach der Formel

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

¹⁵siehe 6.3, S.136

Beweis des Hauptsatzes:

Zu a) Jedenfalls existiert zu $y = f(x)$ die summatorische Funktion $S(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ mit dem Anfangswert $S(x_0) = 0$. Also existiert auch die Funktion

$$u = F(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

und es gilt $F(x) = u_0 + S(x)$. Weil $S(x_0) = 0$ ist, hat die Funktion F den geforderten Anfangswert $F(x_0) = u_0 + S(x_0) = u_0$.

Bleibt zu zeigen: Wenn f stetig ist, gilt: $u' = F'(x) = f(x)$ (Daraus folgt dann, dass $u = F(x)$ eine Stammfunktion von $y = f(x)$ ist.)

Beweis hierfür: Sei für x irgendein beliebiger fester Wert im Definitionsbereich D_f von f gewählt, und sei x_1, x_2, x_3, \dots eine Folge in D_f mit $x_i \rightarrow x$, dabei alle $x_i \neq x$. Sei weiterhin

$$c_i = \frac{F(x_i) - F(x)}{x_i - x}$$

die Folge der mittleren Änderungsraten. Nach 4.3.1 gilt: Wenn die Folge c_1, c_2, c_3, \dots einen Grenzwert \hat{c} besitzt, dann ist die Funktion $u = F(x)$ differenzierbar. Wenn außerdem dieser Grenzwert $= f(x)$ ist, dann ist $F'(x) = f(x)$. Nachzuprüfen ist also, dass gilt:

$$c_i \rightarrow f(x).$$

Rechnung hierzu:

$$F(x_i) - F(x) = \left(u_0 + \int_{x_0}^{x_i} f(t)dt \right) - \left(u_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt \right).$$

u_0 hebt sich weg, und *Regel 53*¹⁶ liefert

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x) &= \int_{x_0}^{x_i} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \\ &\stackrel{(I.2)}{=} \int_{x_0}^{x_i} f(t)dt + \int_x^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_x^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_i} f(t)dt \\ &\stackrel{(I.1)}{=} \int_x^{x_i} f(t)dt \end{aligned}$$

Sei nun i ein großer Indexwert. Wegen $x_i \rightarrow x$ ist dann $x_i - x$ klein. Deshalb genügt dann zur Abschätzung von $\int_x^{x_i} f(t)dt$ eine Riemannsche Summe mit einem einzigen Summanden ($n = 1$, $x = x_0$), also die *elementare Trapezregel*¹⁷:

$$F(x_i) - F(x) = \int_x^{x_i} f(t)dt \approx \frac{f(x) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x)$$

¹⁶siehe 6.1.3, S.131

¹⁷siehe 6.1.1, S.128

und diese Abschätzung wird immer besser, je größer i wird, ja strebt gegen Gleichheit für $i \rightarrow \infty$. Da $x_i \neq x$ vorausgesetzt war, ist Division durch $x_i - x$ erlaubt und liefert

$$\begin{aligned}\frac{F(x_i) - F(x)}{x_i - x} &\approx \frac{f(x) + f(x_i)}{2} \\ c_i &\approx \frac{f(x) + f(x_i)}{2}\end{aligned}$$

und der Fehler in dieser Abschätzung, d.h. die Differenz zwischen beiden Seiten

$$\Delta c_i = c_i - \frac{f(x) + f(x_i)}{2} \quad (6.6)$$

strebt gegen 0 für $i \rightarrow \infty$, als Formel:

$$\Delta c_i \rightarrow 0 \quad (6.7)$$

Addiert man in Gleichung (6.6) auf beiden Seiten $\frac{f(x)+f(x_i)}{2}$, so erhält man für c_i die Darstellung

$$c_i = \Delta c_i + \frac{f(x) + f(x_i)}{2} \quad (6.8)$$

Nun untersuchen wir das Verhalten von $\frac{f(x)+f(x_i)}{2}$ für $i \rightarrow \infty$. Dazu benutzen wir die genaue Definition der Stetigkeit¹⁸:

Aus $x_i \rightarrow x$ folgt, weil f stetig vorausgesetzt wurde, dass $f(x_i) \rightarrow f(x)$. Daraus folgt mit den *Allgemeinen Grenzwertregeln*¹⁹ (G.2) und (G.3)

$$\frac{f(x) + f(x_i)}{2} \rightarrow \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x) \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}\lim c_i &\stackrel{(6.8)}{=} \lim \left(\Delta c_i + \frac{f(x) + f(x_i)}{2} \right) \\ &\stackrel{(G.2)}{=} \lim \Delta c_i + \lim \frac{f(x) + f(x_i)}{2} \\ &\stackrel{(6.7), (6.9)}{=} 0 + f(x)\end{aligned}$$

also $c_i \rightarrow f(x)$, was zu zeigen war.

Zu b) Sei $w = F(x)$ irgendeine (!) schon bekannte Stammfunktion von $y = f(x)$, und sei $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen. Die Stammfunktion $w = F(x)$ nimmt für $x_0 = a$ den Wert $u_0 = F(a)$ an. Nach Teil a) gibt es aber nur eine einzige solche Stammfunktion, und zwar

$$u = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Also ist $w = u$, d.h.

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

Einsetzen von $x = b$ und Subtrahieren von $F(a)$ auf beiden Seiten liefert

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen. □

¹⁸siehe 3.3.1, S.32

¹⁹siehe 3.3.3, S.34

6.5 Zwei Anwendungen des Hauptsatzes

6.5.1 Numerische Berechnung von Stammfunktionen

Eine berühmte Anwendung von Teil a) des *Hauptsatzes* ist die folgende: In der Statistik benötigt man Stammfunktionen zur folgenden Klasse von Funktionen (sog. ‘‘Glockenfunktionen’’²⁰):

$$y = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (6.10)$$

wobei $\sigma > 0$ und μ gegebene reelle Konstante sind. Die **einzige** Berechnungsmöglichkeit für diese Stammfunktionen (und für viele andere Stammfunktionen), wird durch den *Hauptsatz*, Teil a) eröffnet: In der Formel

$$u = F(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (6.11)$$

(hier für $f(t)$ die konkrete Funktion $y = p(t)$ eingesetzt) muss man das bestimmte Integral rechtsseits für ganz viele Werte von x numerisch möglichst genau berechnen und erhält so eine Wertetabelle mit Näherungswerten für $u = F(x)$. Mehr ist nicht machbar! Insbesondere gibt es außer (6.11) keine Berechnungsformel für u als Funktion von x .

Dieses **Verfahren zur Berechnung von Wertetabellen für Stammfunktionen** wird im Folgenden allgemein vorgestellt:

Gegeben sei eine **stetige** Funktion $y = f(x)$, gesucht die Stammfunktion $u = F(x)$ mit vorgeschriebenem Anfangswert $\bar{u} = F(\bar{x})$.

1. Schritt: Beschaffe eine Wertetabelle für $y = f(x)$, auf- oder absteigend sortiert nach x -Werten, mit möglichst kleinen Schrittweiten Δx (nicht unbedingt gleich groß), welche den Wert \bar{x} enthält, etwa an i -ter Position, d.h. $x_i = \bar{x}$.
2. Schritt: Richte eine zusätzliche Rubrik für die (zu berechnenden) Werte $u_i = F(x_i)$ ein wie folgt:

Trage zunächst den vorgeschriebenen Anfangswert $u_i = \bar{u}$ ein.

x	x_0	...	x_{i-2}	x_{i-1}	$x_i = \bar{x}$	x_{i+1}	x_{i+2}	...	x_n
y	y_0	...	y_{i-2}	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	y_{i+2}	...	y_n
$u = F(x)$					$u_i = \bar{u}$				

Es ist $u' = y$, also $\Delta u \approx y \cdot \Delta x$, und mit der elementaren Trapezregel gilt in bestmöglicher Näherung:

$$u_i - u_{i-1} \approx \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \text{ und } u_{i+1} - u_i \approx \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Durch Auflösen dieser beiden Gleichungen nach u_{i-1} bzw. nach u_{i+1} erkennt man, wie weiter zu verfahren ist:

²⁰siehe 8.1, S.132ff

3. Schritt: Berechne ggf. die u -Werte linksseits vom Anfangswert $u_i = \bar{u}$ sukzessive in absteigender Reihenfolge wie folgt:

$$\begin{aligned} u_{i-1} &\approx u_i - \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ u_{i-2} &\approx u_{i-1} - \frac{y_{i-2} + y_{i-1}}{2} \cdot (x_{i-1} - x_{i-2}) \\ &\vdots \\ u_0 &\approx u_1 - \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

4. Schritt: Berechne die u -Werte rechtsseits vom Anfangswert $u_i = \bar{u}$ sukzessive in aufsteigender Reihenfolge wie folgt:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ u_{i+2} &= u_{i+1} + \frac{y_{i+1} + y_{i+2}}{2} \cdot (x_{i+2} - x_{i+1}) \\ &\vdots \\ u_n &\approx u_{n-1} + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

WARNUNG: u_{i-1} und u_{i+1} werden jeweils nur näherungsweise, also mit einem absoluten Fehler berechnet. Da sie als Summand in der Näherungsformel für u_{i-2} bzw. u_{i+2} auftreten, pflanzt sich dieser Fehler fort, und zwar additiv: Ist der absolute Fehler, den die Näherungsformel erzeugt, z.B. von der Größenordnung $0,5 \cdot 10^{-2}$, so ist der Fehler nach k sukzessiven Berechnungen von der Größenordnung $k \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}$. Daher möglichst genau arbeiten.

6.5.2 Unbestimmtes Integral und partielle Integration

Der *Hauptsatz*, Teil b), zeigt die Möglichkeit auf, alle bestimmten Integrale über $f(x)dx$ ohne die Mühsal der Ausnutzung einer Wertetabelle oder eines Graphen für $y = f(x)$ zu berechnen, auch ohne die damit verbundene Ungenauigkeit, wenn man nur **irgendeine** Stammfunktion von $y = f(x)$ kennt. Daher rührt folgende traditionelle

Bezeichnung: Ist $u = F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $y = f(x)$, so nennt man $u = F(x)$ auch **ein unbestimmtes Integral von f** .

Schreibweise hierfür:
$$F(x) = \int f(x)dx$$

(wie bestimmtes Integral, aber ohne Eintragung von Integrationsgrenzen a und b).

Das Finden von **Wertetabellen für Stammfunktionen** ist mittels der im vorigen Paragraphen vorgestellten Technik immer möglich. Hat man eine solche Wertetabelle für die

Stammfunktion $F(x)$ zur Verfügung, so schlägt man lediglich die Werte $F(a)$ und $F(b)$ in der Tabelle nach und hat damit schon das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ berechnet. Für die Berechnung eines einzigen bestimmten Integrals über $f(x)dx$ lohnt sich diese Praxis gegenüber der numerischen Berechnung des bestimmten Integrals mittels der Trapezregel nur dann, wenn eine veröffentlichte Wertetabelle greifbar ist. Die eigene Herstellung einer solchen Wertetabelle macht erst dann Sinn, wenn man viele bestimmte Integrale über dieselbe Funktion $y = f(x)$, aber mit verschiedenen Integrationsgrenzen ausrechnen soll.

Noch begehrt als Wertetabellen für Stammfunktionen sind natürlich **Berechnungsformeln für Stammfunktionen**. Einen generellen Algorithmus, aus einer Berechnungsformel für $y = f(x)$ eine Berechnungsformel für eine Stammfunktion zu gewinnen, gibt es aber nicht (siehe die Glockenfunktionen (6.10), S.141). Von Wissenschaftlern empirisch gefundene Stammfunktionen werden daher über die Jahrhunderte gesammelt und in Buchform veröffentlicht. Vor allem von Physikern werden solche Sammlungen reichlich benutzt.

Da aber auch eine solche Sammlung niemals erschöpfend sein kann, auch nicht immer zur Hand ist, gewinnen alle Regeln an Bedeutung, die es gestatten, ein bestimmtes Integral in ein anderes umzuformen, d.h. die zeigen, wie man den Wert eines Integrals $\int_a^b f(x)dx$ dadurch finden kann, dass man den Wert eines geeigneten anderen Integrals $\int_c^d g(x)dx$ bestimmt: Wenn sich zu f keine Stammfunktion finden lassen will, dann vielleicht zu g !

Dazu gehören die *Regeln 53 bis 56*²¹. Mittels des *Hauptsatzes*, Teil b), gewinnt man noch eine zusätzliche solche Regel:

Partielle Integration: *Ist das bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

zu berechnen und kennt man von $f(x)$ irgendeine Stammfunktion $F(x)$ sowie von $g(x)$ die Ableitung $g'(x)$, so kann man wie folgt umformen:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Beweis der partiellen Integrationsregel: Die Funktion $u = F(x)g(x)$ besitzt die Ableitung

$$\begin{aligned} u' &= (F(x)g(x))' && | \text{Produktregel (D.3)}^{22} \\ &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) && | F'(x) = f(x) \text{ einsetzen} \\ &= f(x)g(x) + F(x)g'(x) \end{aligned}$$

Folglich ist umgekehrt $u = F(x)g(x)$ eine Stammfunktion von $y = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$. Daraus folgt mit dem *Hauptsatz*, Teil b), für bestimmte Integrale über die letztere Funktion:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)g(x) + F(x)g'(x))dx &= u(b) - u(a) && | \text{Regel 55 (Summenregel)} \\ \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) && | - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ \int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

□

²¹ siehe 6.1.3, S.131f: Regeln für die Integrationsgrenzen bestimmter Integrale, Faktorregel, Summenregel und Substitutionsregel

Beispiel 1: Berechnung des **bestimmten Integrals** $\int_2^5 x \exp(x) dx$:

Setze $f(x) = \exp(x)$ mit Stammfunktion $F(x) = \exp(x)$, und $g(x) = x$ mit $g'(x) = 1$.
Dann folgt mit der *partiellen Integrationsregel*

$$\begin{aligned} \int_2^5 \exp(x) \cdot x dx &= F(5)g(5) - F(2)g(2) - \int_2^5 F(x)g'(x) dx && | \text{ Für } F \text{ und } g \text{ einsetzen:} \\ &= 5 \exp(5) - 2 \exp(2) - \int_2^5 \exp(x) dx \end{aligned}$$

Das jetzt noch zu berechnende Integral $\int_2^5 \exp(x) dx$ hat aber den Integranden $f(x) = \exp(x)$, zu dem wir die Stammfunktion $F(x) = \exp(x)$ kennen. Also können wir dieses Integral mit dem *Hauptsatz*, Teil b), ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \exp(x) \cdot x dx &= 5 \exp(5) - 2 \exp(2) - (F(5) - F(2)) && | \text{ Für } F \text{ einsetzen:} \\ &= 5 \exp(5) - 2 \exp(2) - (\exp(5) - \exp(2)) \\ &= 4 \exp(5) - \exp(2) \end{aligned}$$

Beispiel 2: Berechnung **einer Stammfunktion** $u = F(x)$ von $y = \ln x$, ($x > 0$), mit dem Anfangswert $F(1) = 5$ (z.B.):

Nach dem *Hauptsatz*, Teil a), ist diese Stammfunktion gegeben durch

$$F(x) = 5 + \int_1^x \ln t dt \quad \text{für alle } x > 0.$$

Jetzt kommt einer der vielen beim Integrieren benötigten Tricks: Setze $f(t) = 1$ mit $F(t) = t$ und $g(t) = \ln t$ mit $g'(t) \stackrel{\text{Regel 32}}{=} \frac{1}{t}$, und wende *partielle Integration* an:

$$\begin{aligned} F(x) &= 5 + \int_1^x 1 \cdot \ln t dt \\ &= 5 + \int_1^x f(t)g(t) dt \\ &= 5 + F(x)g(x) - F(1)g(1) - \int_1^x F(t)g'(t) dt && | \text{ rückerinsetzen} \\ &= 5 + x \cdot \ln x - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt && | \ln 1 = 0 \text{ einsetzen} \\ &= 5 + x \ln x - \int_1^x 1 dt \end{aligned}$$

Das jetzt noch zu berechnende Integral $\int_1^x 1 dt$ hat den Integranden $f(t) = 1$ mit der bekannten Stammfunktion $u(t) = t$. Daher kann es mit dem *Hauptsatz*, Teil b) ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} F(x) &= 5 + x \ln x - (u(x) - u(1)) \\ &= 5 + x \ln x - (x - 1) \\ &= 6 + x \ln x - x \end{aligned}$$

Da sich alle anderen Stammfunktionen von $y = \ln x$ von $F(x) = 6 + x \ln x - x$ nur um eine additive Konstante unterscheiden²³, sind sie alle von der Bauart $u = x \ln x - x + \text{const.}$ Traditionelle Schreibweise hierfür:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + \text{const.}$$

²³siehe *Regeln für Stammfunktionen*, (S.2), S.135