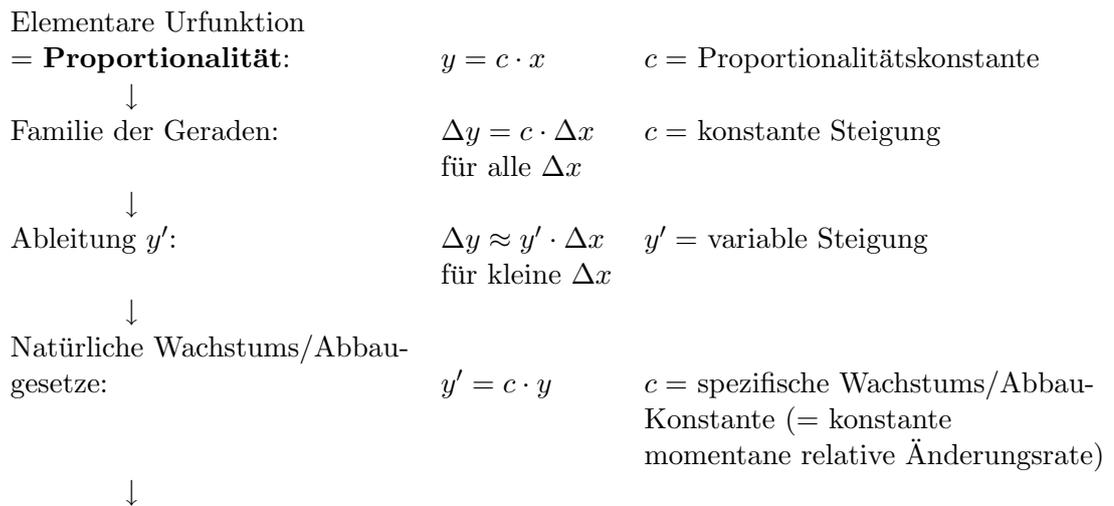


# Anhang D

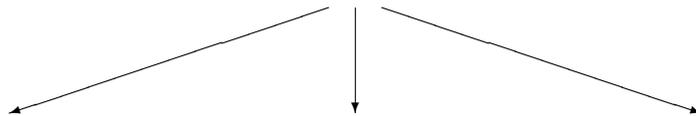
## Systematik mathematischer Funktionen

### Elementare Funktionen



### Nichtelementare Funktionen

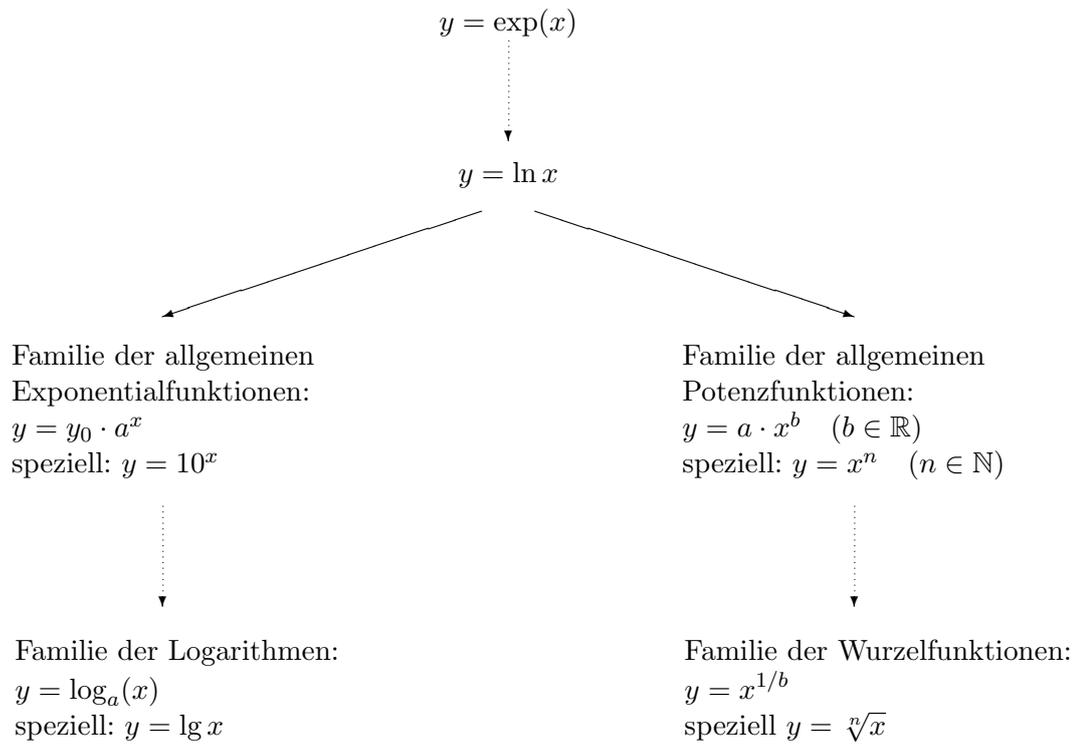
Nichtelementare Urfunktion  
= **Exponentialfunktion:**  $y = \exp(x)$   
bzw.  $y = e^x$



- D.1**  $\ln$ -abhängige Funktionen    **D.2** Winkelfunktionen und Verwandte    **D.3** Statistische Funktionen

### D.1 $\ln$ -abhängige Funktionen

Abkömmling: Pfeil  
 Umkehrfunktion: punktierter Pfeil



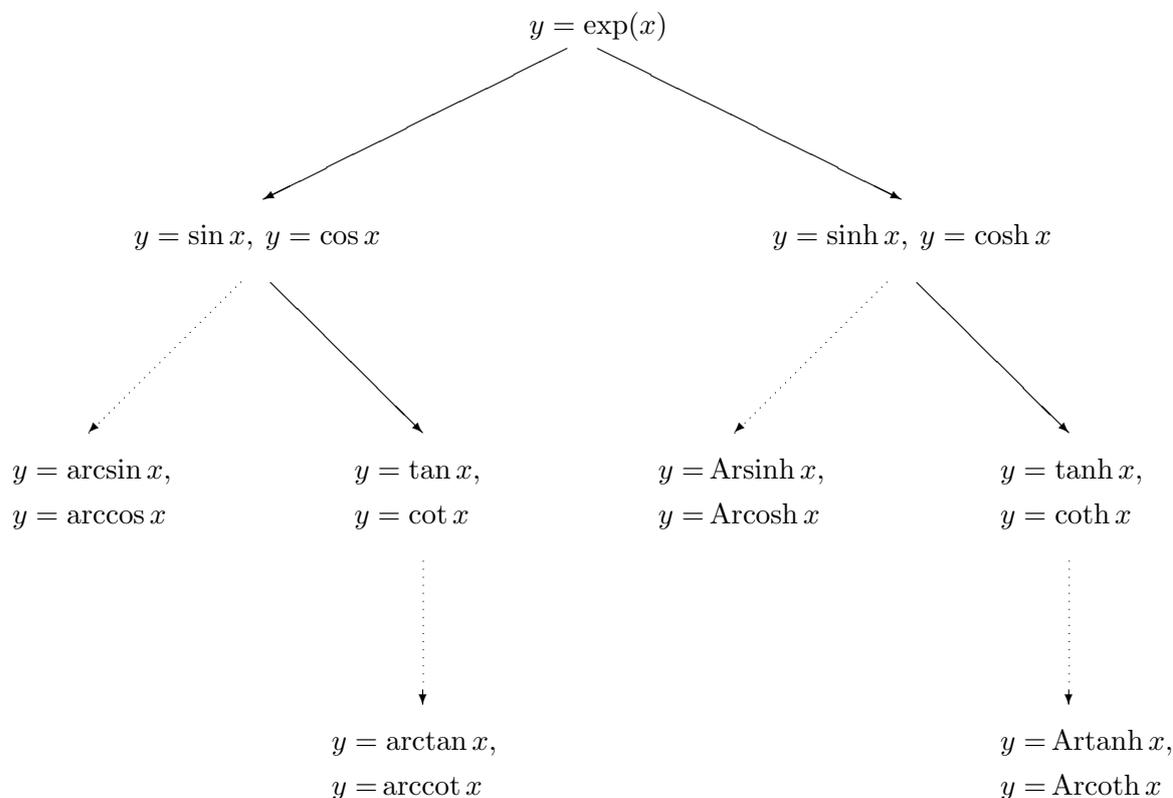
**Berechnungsformeln mittels  $exp$  und  $\ln$  :**

Allgemeine Exponentialfunktion:	$y = y_0 \cdot a^x$	$= y_0 \cdot \exp(\ln a \cdot x)$
speziell:	$y = 10^x$	$= \exp(\ln 10 \cdot x)$
Logarithmus zur Basis $a$ :	$y = \log_a x$	$= \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$
speziell:	$y = \lg x$	$= \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$
Allgemeine Potenzfunktion:	$y = a \cdot x^b$	$= a \cdot \exp(b \cdot \ln x)$
Wurzelfunktion:	$y = x^{1/b}$	$= \exp\left(\frac{\ln x}{b}\right)$
speziell:	$y = \sqrt[n]{x}$	$= \exp\left(\frac{\ln x}{n}\right)$

Für alle in D.1 genannten Funktionenklassen gibt es Verfahren, von der Wertetabelle zur Berechnungsformel zu kommen mittels graphischer Tests und Linearer Regression (siehe B, S.210 ff).

## D.2 Winkelfunktionen und Verwandte

Abkömmling: Pfeil  
 Umkehrfunktion: punktierter Pfeil



### Berechnungsformeln mittels $\exp$ (und komplexer Zahlen):<sup>1</sup>

Sinus:	$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$
Cosinus:	$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$
Tangens:	$\tan x = \frac{1}{i} \cdot \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{\exp(ix) + \exp(-ix)}$
Cotangens:	$\cot x = i \cdot \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{\exp(ix) - \exp(-ix)}$
Sinus hyperbolicus:	$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$
Cosinus hyperbolicus:	$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$
Tangens hyperbolicus:	$\tanh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$
Cotangens hyperbolicus:	$\coth x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}$

<sup>1</sup>siehe 5.11.5, S.123 ff

### D.3 Statistische Funktionen

#### Normalverteilung

Glockenfunktion (Dichtefunktion

zur  $N(\mu; \sigma)$ -Normalverteilung):  $y = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

speziell: Gauß-Glocke:  $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$N(\mu; \sigma)$ -Normalverteilung:  $P(x \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$   
 $= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

speziell: Gauß'sche  $\Phi$ -Funktion:  $y = \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

#### Poissonverteilung

Dichtefunktion:  $p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$

Verteilungsfunktion:  $P(k \leq a) = \sum_{k=0}^a p_\lambda(k) = \left(\sum_{k=0}^a \frac{\lambda^k}{k!}\right) \cdot \exp(-\lambda)$

Die Dichtefunktion der **Binomialverteilung**

$$p_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und die zugehörige Verteilungsfunktion

$$P(k \leq a) = \sum_{k=0}^a p_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^a \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

sind auf vielfältige Weise mit der Exponentialfunktion verbunden:

- Nach der 1. Grenzwertregel für die Binomialverteilung<sup>2</sup> strebt die Dichtefunktion  $p_{n,p}(k)$  für  $p \leq 0,01$  und große  $n$  ( $n$  mindestens dreistellig) gegen die Dichtefunktion  $p_\lambda(k)$  der Poissonverteilung (wobei  $\lambda = p \cdot n$ ).
- Nach der 2. Grenzwertregel für die Binomialverteilung<sup>3</sup> strebt die Verteilungsfunktion  $P(k \leq a) = \sum_{k=0}^a p_{n,p}(k)$  für  $n > \frac{9}{p(1-p)}$  gegen die Verteilungsfunktion  $\Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sigma}\right)$  der  $N(\lambda; \sigma)$ -Normalverteilung (wobei  $\lambda = p \cdot n$  und  $\sigma = \sqrt{p \cdot (1-p) \cdot n}$ ).

<sup>2</sup>siehe Regel 79, 9.3.3, S.188

<sup>3</sup>siehe Regel 81, 9.3.4, S.190

- Für die in den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  auftretende

$$\textbf{Fakultät } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

gibt es eine berühmte Schätzformel, die besonders für sehr große  $n$  benutzt wird:

**Stirling'sche Formel:**

$$\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot \exp(-n) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot \exp(-n) \cdot \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

- Außerdem gibt es eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion, welche für alle reellen Zahlen  $x$  (auch für negative!) definiert ist und für alle natürlichen Zahlen  $n$  gerade den Wert  $n!$  annimmt (man nennt diese Funktion "**Verallgemeinerung der Fakultät**"), nämlich

$$y = x \cdot \Gamma(x)$$

mit der berühmten

$$\textbf{Gammafunktion } \Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \exp((x-1) \ln t - t) dt$$