PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

6. Juni 2002

Übungen zu „Grundlagen der funktionalen Programmierung“

Nr. 7, Abgabe: 13. Juni in der Übung

Die Abgabe ist in Gruppen bis zu zwei Personen erlaubt.

---

15. Semantik der While-Schleife **5 Punkte**

Seien A eine Menge, $p : A \rightarrow Bool$ und $f : A \rightarrow A$. $[A \dashrightarrow A]$ bezeichne die Halbordnung der partiellen Funktionen über A mit

$$h_1 \leq h_2 \quad :\Leftrightarrow \quad graph(h_1) \subseteq graph(h_2)$$

Das Funktional $\Phi : [A \dashrightarrow A] \rightarrow [A \dashrightarrow A]$ sei gegeben durch:

$$\Phi(h) := a \mapsto \text{if } p(a) \text{ then } h(f(a)) \text{ else } a$$

Zeigen Sie:

(a) Φ ist monoton, d.h. für alle $h_1, h_2 : A \dashrightarrow A$ gilt: $h_1 \leq h_2 \Rightarrow \Phi(h_1) \leq \Phi(h_2)$

(b) Für die nirgends definierte Funktion $f_\emptyset : A \dashrightarrow A$ mit $Def(f_\emptyset) = \emptyset$ gilt für alle $n \geq 0$:

$$\Phi^n(f_\emptyset) \leq \Phi^{n+1}(f_\emptyset)$$

(c) Die kleinste obere Schranke g der Kette $(\Phi^n(f_\emptyset) \mid n \in \mathbb{N})$ mit

$$graph(g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} graph(\Phi^n(f_\emptyset))$$

ist kleinster Fixpunkt von Φ, d.h.

i. g ist Fixpunkt von Φ: $\Phi(g) = g$.

ii. Für jeden Fixpunkt $\tilde{g}$ von Φ gilt: $g \leq \tilde{g}$.

16. Monotone und strikte Funktionen über $Bool_\perp$ **4 Punkte**

(a) Wieviele Funktionen $Bool_\perp \rightarrow Bool_\perp$ gibt es? Wieviele davon sind strikt? Wieviele sind monoton?

(b) Geben Sie alle monotonen Fortsetzungen von

$$\text{and}, \text{or} : Bool \rightarrow Bool \rightarrow Bool$$

auf $Bool_\perp \rightarrow Bool_\perp \rightarrow Bool_\perp$ an. Zeichnen Sie Diagramme für die Inklusionsbeziehungen zwischen den verschiedenen Fortsetzungen. Was ist die operationelle Interpretation der verschiedenen Fortsetzungen?

17. Halbordnung **3 Punkte**

Betrachten Sie die Teilbarkeitsrelation $m \mid n$ definiert durch $\exists i \in \mathbb{N} : \; m * i = n$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, |)$ eine Halbordnung ist. Ist diese Halbordnung vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.