PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.-Inform. Jost Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge
9. Mai 2003

Übungen zur „Semantik von Programmiersprachen“, SS 2003

Nr. 2, Besprechung der mündlichen Aufgaben: 16. Mai in der Übung, Abgabe der Hausaufgaben: 20. Mai in der Vorlesung

---

A. Mündliche Aufgaben

2.1 Induktionsprinzipien

Sei Δ ein Alphabet (d.h. eine endliche, nicht-leere Menge). Eine Zeichenkette über Δ ist eine Folge $a_1 \dots a_n$ von Symbolen $a_j \in \Delta$ mit $0 \leq j \leq n, n \geq 0$. Die Anzahl n der Symbole einer Zeichenkette bezeichnet man als Länge der Zeichenkette. Die leere Zeichenkette hat die Länge 0. Zwei Zeichenketten u und v können zu der Zeichenkette uv konkateniert werden.

> **Behauptung:** Es existiert keine Zeichenkette u, für die $au = ub$ mit zwei verschiedenen Symbolen a und b aus Δ.

Zeigen Sie diese Behauptung

(a) mittels vollständiger Induktion
(b) durch einen Widerspruchsbeweis
(c) mittels einer (von der vollständigen Induktion verschiedenen) wohlfundierten Induktion

2.2 Terminationsbeweis

Gegeben sei die folgende **IMP**-Anweisung, die Euklids Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier positiver ganzer Zahlen implementiert:

$$\text{Euklid} \equiv \textbf{while } \neg(M = N) \textbf{ do if } M \leq N \textbf{ then } N := N - M \textbf{ else } M := M - N$$

Beweisen Sie, dass für alle $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\sigma(M) \geq 1 \land \sigma(N) \geq 1 \Rightarrow \exists \sigma'.\langle \text{ Euklid}, \sigma \rangle \to \sigma'$$

Hinweis: Benutzen Sie eine wohlfundierte Relation auf Umgebungen.

B. Hausaufgaben

Die Abgabe der Hausaufgaben ist in Zweiergruppen erlaubt.

2.3 Operationelle Semantik von Anweisungen — 6 Punkte

Die Abbildung $\mathcal{O}[\![.]\!] : \textbf{Com} \to (\Sigma \dashrightarrow \Sigma)$, die jeder Anweisung $c \in \textbf{Com}$ die partielle Zustandstransformation $\mathcal{O}[\![c]\!]$ mit

$$\mathcal{O}[\![c]\!]\sigma = \begin{cases} \sigma' & \text{falls } \langle c, \sigma \rangle \to \sigma' \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnet, heißt *Funktional der operationellen Semantik*.

(a) Für welche Anweisungen $c \in \mathbf{Com}$ und Zustände $\sigma \in \Sigma$ ist $\mathcal{O}[\![c]\!]\sigma$ undefiniert?

(b) Zeigen Sie für die folgende Anweisung $c \in \mathbf{Com}$

$$y := 1; \mathbf{while}\ \neg(x = 1)\ \mathbf{do}\ (y := y * x; x := x - 1),$$

dass sie die Fakultätsfunktion berechnet, d.h. dass ihre operationelle Semantik der folgenden Bedingung genügt:

$$\mathcal{O}[\![c]\!]\sigma(y) = (\sigma(x))! \text{ für alle } \sigma \in \Sigma \text{ mit } \sigma(x) \geq 1.$$

2.4 Sei $\prec$ eine wohlfundierte Relation über einer Menge B. Zeigen Sie: 2 Punkte

(a) Die transitive Hülle $\prec^+$ ist ebenfalls wohlfundiert.

(b) Die reflexive, transitive Hülle ist eine Halbordnung.

2.5 Induktion 4 Punkte

(a) Definieren Sie induktiv eine Abbildung

$$FV : \mathbf{AExp} \to \wp(\mathbf{Loc})$$

die zu einem arithmetischen Ausdruck die Menge der in diesem Ausdruck vorkommenden (freien) Variablen bestimmt.

(b) Beweisen Sie induktiv die folgende Aussage:

Seien $a \in \mathbf{AExp}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(X) = \sigma'(X)$ für alle $X \in FV(a)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$\langle a, \sigma \rangle \to n \text{ gdw. } \langle a, \sigma' \rangle \to n.$$