PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.-Inform. Jost Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge
19. Mai 2003

Übungen zur „Semantik von Programmiersprachen“, SS 2003

Nr. 3, Besprechung der mündlichen Aufgaben: 23. Mai in der Übung, Abgabe der Hausaufgaben: 26. Mai in der Vorlesung

A. Mündliche Aufgaben

3.1 Betrachten Sie das folgende Fragment der Fakultätsberechnung:

$$\textbf{while } \neg(X = 1) \textbf{ do } (Y := Y * X; X := X - 1).$$

(a) Bestimmen Sie das durch diese Anweisung festgelegte Funktional

$$\Phi : (\Sigma \dashrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \dashrightarrow \Sigma).$$

(b) Geben Sie mindestens zwei verschiedene Fixpunkte von Φ an.

3.2 Geben Sie eine Teilmenge von $\Sigma \dashrightarrow \Sigma$ an, die keine obere Schranke besitzt.

3.3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionale des Typs $(\Sigma \dashrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \dashrightarrow \Sigma)$ bzgl. der durch Graphinklusion gegebenen Halbordnung $(\Sigma \dashrightarrow \Sigma, \sqsubseteq)$ monoton sind:

(a) $\Phi_1(f) = f$

(b) $\Phi_2(f) = \begin{cases} g_1 & \text{falls } f = g_2 \\ g_2 & \text{sonst.} \end{cases}$, wobei $g_1, g_2 : \Sigma \dashrightarrow \Sigma$ mit $g_1 \neq g_2$.

(c) $\Phi_3(f)(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{falls } \sigma(X) \neq 0 \\ \sigma & \text{sonst.} \end{cases}$

B. Hausaufgaben

Die Abgabe der Hausaufgaben ist in Zweiergruppen erlaubt.

3.4 Bestimmen Sie die denotationelle Semantik der Anweisung **4 Punkte**

$$Z := 0; \textbf{ while } Y \leq X \textbf{ do } (\text{Z:=Z+1; X:= X-Y}).$$

3.5 Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine kettenvollständige Halbordnung mit kleinstem Element $\bot_D := \bigsqcup \emptyset$. **8 Punkte**
Die Menge der *Listen über* D, $L(D)$, ist induktiv definiert durch:

- $[\,] \in L(D)$ (die *leere Liste*) und
- mit $d \in D \cup L(D)$ und $l \in L(D)$ ist $(d : l) \in L(D)$.

Sei $\perp$ ein neues Symbol. Wir erweitern $\sqsubseteq$ induktiv auf $L(D)_\perp := L(D) \cup \{\perp\}$ durch

- $\perp \sqsubseteq \perp, l \sqsubseteq l$ und $\perp \sqsubseteq l$ für alle $l \in L(D)$ und
- $(d : l) \sqsubseteq (d' : l')$ genau dann, wenn $d \sqsubseteq d'$ und $l \sqsubseteq l'$.

(a) Zeigen Sie, dass $(L(D)_\perp, \sqsubseteq)$ eine kettenvollständige Halbordnung mit kleinstem Element $\perp$ ist. / 3

(b) Weisen Sie nach: Ersetzt man in der induktiven Erweiterung der Relation $\sqsubseteq$ das Symbol $\perp$ durch [] oder $(\perp_D : [])$, so sind die entsprechenden Halbordnungen nicht kettenvollständig. / 2

(c) Zur Manipulation von Listen verwenden wir die Funktionen / 3
tail : $L(D)_\perp \to L(D)_\perp$ und *cons* : $L(D)_\perp \times L(D)_\perp \to L(D)_\perp$ mit

$$tail(l) = \begin{cases} l' & \text{falls } l = (d : l') \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases} \qquad cons(d, l) = \begin{cases} (d : l) & \text{falls } d, l \in L(D) \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

für alle $d, l \in L(D)_\perp$.

Beweisen Sie, dass *tail* und *cons* in $(L(D)_\perp, \sqsubseteq)$ stetig sind.