PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.-Inform. Jost Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge
27. Mai 2003

Übungen zur „Semantik von Programmiersprachen", SS 2003

Nr. 4, Besprechung der mündlichen Aufgaben: 30. Mai in der Übung, Abgabe der Hausaufgaben: 3. Juni in der Vorlesung

A. Mündliche Aufgaben

4.1 Beweisen Sie die Äquivalenz der operationellen und denotationellen Ausdruckssemantiken (Satz 4.6 der Vorlesung, Teile (a) und (b)).

4.2 (a) Geben Sie eine Zusicherung $A \in \mathbf{Assn}$ mit einer logischen Variablen $i \in \mathbf{IVar}$ an, welche ausdrückt, dass i eine Primzahl ist, d.h. dass für alle $\sigma \in \Sigma$ und alle $I \in \mathcal{I}$ soll genau dann $\sigma \models^I A$ gelten, wenn $I(i)$ eine Primzahl ist.

(b) Geben Sie eine Zusicherung $A \in \mathbf{Assn}$ mit logischen Variablen $i, j, k \in \mathbf{IVar}$ an, welche ausdrückt, dass k das kleinste gemeinsame Vielfache von i und j ist.

B. Hausaufgaben

Die Abgabe der Hausaufgaben ist in Zweiergruppen erlaubt.

4.3 Auf der Menge $BZ = \{0,1\}^+$ der Binärzahlen lässt sich eine binäre Operation $\oplus$ durch die folgende „rekursive Tabelle" definieren (mit $\beta, \gamma \in BZ$): 5 Punkte

$\oplus$	0	1	$\gamma 0$	$\gamma 1$
0	0	1	$\gamma 0$	$\gamma 1$
1	1	10	$\gamma 1$	$(\gamma \oplus 1)0$
$\beta 0$	$\beta 0$	$\beta 1$	$(\beta \oplus \gamma)0$	$(\beta \oplus \gamma)1$
$\beta 1$	$\beta 1$	$(\beta \oplus 1)0$	$(\beta \oplus \gamma)1$	$(\beta \oplus (\gamma \oplus 1))0$

Diese Tabelle beschreibt den üblichen Algorithmus zur Addition von Binärzahlen. Die Korrektheit des Verfahrens soll unter Verwendung der Semantik einer Binärzahl, d.h. ihres Wertes, nachgewiesen werden.

(a) Definieren Sie eine geeignete Semantik für Binärzahlen, d.h. eine Abbildung / 2

$$\psi[\![.]\!] : BZ \to \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie für $\beta, \gamma \in BZ$ durch Induktion über den Aufbau von β, dass das folgende Diagramm kommutiert / 3

$$\begin{array}{ccc} BZ \times BZ & \xrightarrow{\psi[\![.]\!] \times \psi[\![.]\!]} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \oplus \downarrow & & \downarrow + \\ BZ & \xrightarrow{\psi[\![.]\!]} & \mathbb{N} \end{array}$$

d.h. dass gilt: $\psi[\![\beta \oplus \gamma]\!] = \psi[\![\beta]\!] + \psi[\![\gamma]\!]$.

4.4 Dijkstras „guarded commands“ besitzen im wesentlichen die Gestalt **7 Punkte**

$$\begin{array}{ll} \mathbf{do} & b_1 \to c_1 \\ & b_2 \to c_2 \\ \mathbf{od} & \end{array}$$

wobei $b_1, b_2 \in \mathbf{BExp}$ und $c_1, c_2 \in \mathbf{Com}$. Sie bilden eine Verallgemeinerung der **while**-Schleife:

> Solange ein Test b_i wahr ist, wird die entsprechende Anweisung c_i ausgeführt. Die Erfülltheit beider Tests führt zu einer nichtdeterministischen Auswahl der Anweisung. Die Berechnung terminiert, wenn kein Test mehr wahr ist.

(a) Überlegen Sie sich anhand dieser informellen Semantikbeschreibung, welche Funktion auf den natürlichen Zahlen durch die Anweisung / 2

$$c = \begin{array}{ll} \mathbf{do} & X > Y \to X := X - Y \\ & Y > X \to Y := Y - X \\ \mathbf{od} & \end{array}$$

berechnet wird.

(b) Für $i \in \{1, 2\}$ seien $b_1, b_2 \in \mathbf{BExp}$ sich gegenseitig ausschließende Tests und $c_1, c_2 \in \mathbf{Com}$. / 3

Wie kann man die Semantik von

$$\begin{array}{ll} \mathbf{do} & b_1 \to c_1 \\ & b_2 \to c_2 \\ \mathbf{od} & \end{array}$$

als kleinsten Fixpunkt einer stetigen Abbildung $\Phi : (\Sigma \dashrightarrow \Sigma) \longrightarrow (\Sigma \dashrightarrow \Sigma)$ gewinnen?

(c) Berechnen Sie die Semantik der Anweisung c aus Teil (a) unter Verwendung von Φ nach dem Fixpunktsatz von Knaster und Tarski. / 2