PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.-Inform. Jost Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge
3. Juni 2003

Übungen zur „Semantik von Programmiersprachen", SS 2003

Nr. 5, Besprechung der mündlichen Aufgaben: 6. Juni in der Übung, Abgabe der Hausaufgaben: 10. Juni in der Vorlesung

A. Mündliche Aufgaben

5.1 (a) Definieren Sie, wann eine logische Variable *frei* oder durch Quantoren *gebunden* in einer Zusicherung auftritt.

(b) Beschreiben Sie formal die Substitution einer logischen Variablen $i \in \mathbf{IVar}$ durch eine Zahl $z \in \mathbf{N}$ in einer Zusicherung $A \in \mathbf{Assn}$ bzw. einem arithmetischen Ausdruck $a \in \mathbf{LExp}$ (Schreibweise: $A[i \mapsto z]$ bzw. $a[i \mapsto z]$).

(c) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbf{LExp}$, $i \in \mathbf{IVar}$, $z \in \mathbf{N}$, $I \in \mathcal{I}$ und $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\mathcal{L}[\![a]\!]I[i \mapsto z]\sigma = \mathcal{L}[\![a[i \mapsto z]]\!]I\sigma$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbf{Assn}$, $i \in \mathbf{IVar}$, $I \in \mathcal{I}$ und $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\sigma \models^I \forall i.A \text{ gdw. } \sigma \models^I A[i \mapsto z] \text{ für alle } z \in \mathbf{N}$$

5.2 Bestimmen Sie eine geeignete Invariante, mit deren Hilfe sich die folgende partielle Korrektheitsaussage nachweisen lässt:

$$\{Y = i \land X = 1\} \ \mathbf{while} \ \neg(Y = 0) \ \mathbf{do} \ (Y := Y - 1; X := 2 * X) \ \{X = 2^i\}.$$

B. Hausaufgaben

Die Abgabe der Hausaufgaben ist in Zweiergruppen erlaubt.

5.3 Gegeben sei die folgende Anweisung $c \in \mathbf{Com}$: $\boxed{\text{5 Punkte}}$

$$Z := 0; \ \mathbf{while} \ Y \leq X \ \mathbf{do} \ (Z := Z + 1; X := X - Y).$$

(a) Formulieren Sie eine partielle Korrektheitsaussage für c, die folgendes ausdrückt: Wenn die Programmausführung in einem Zustand $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(X) > 0$ und $\sigma(Y) > 0$ startet und in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ endet, dann gilt

$$\sigma'(Z) = \sigma(X) \ \mathbf{div} \ \sigma(Y) \text{ und } \sigma'(X) = \sigma(X) \ \mathbf{mod} \ \sigma(Y)$$

(b) Weisen Sie die Gültigkeit Ihrer Aussage mit Hilfe der Hoare-Regeln (Definition 5.6 der Vorlesung) nach.

5.4 Zeigen Sie die Korrektheit der Beweisregel für die **while**-Schleife mithilfe der operationellen Semantik, d.h. zeigen Sie für $b \in \mathbf{BExp}$, $c \in \mathbf{Com}$ und $A \in \mathbf{Assn}$, dass aus $\vdash \{A\} \ \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c \ \{A \land (\neg b)\}$ folgt: $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und $I \in \mathcal{I}$ mit $\sigma \models^I A$ und $\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \to \sigma'$ gilt: $\sigma' \models^I A \land \neg b$.

5.5 Entwickeln Sie, ohne von der Existenz der **while**-Anweisung auszugehen, eine Beweisregel für eine Anweisung der Form $\mathbf{for} \ X := a_1 \ \mathbf{to} \ a_2 \ \mathbf{do} \ c$, wobei $X \in \mathbf{Loc}$, $a_1, a_2 \in \mathbf{AExp}$ und $c \in \mathbf{Com}$ seien. $\boxed{\text{4 Punkte}}$