PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

7. Mai 2003

Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2003

Nr. 3, Besprechung bzw. Abgabe: 14. bis 16. Mai in den Übungsgruppen

A. Mündliche Aufgaben

13. Erkennbarkeit von Teilsprachen

Gegeben seien ein Alphabet Σ mit $\$ \notin \Sigma$ und zwei formale Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $L_1\$L_2 \in \mathcal{L}(\Sigma \cup \{\$\}, \mathrm{NFA})$.

(a) Zeigen Sie, dass $L_1 \in \mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{NFA})$ ist. (b) Gilt auch $L_2 \in \mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{NFA})$?

14. Abschlusseigenschaften

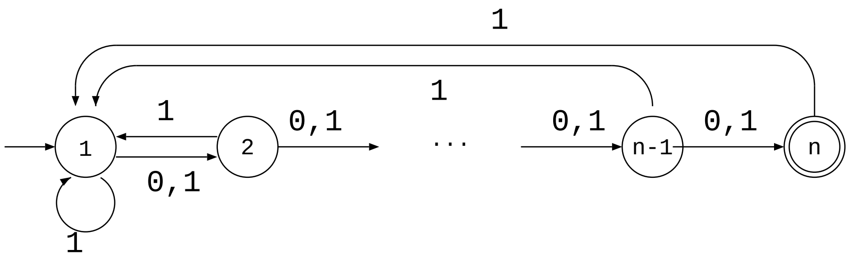
Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter DFA's, dass die Sprachen aus $\mathcal{L}(\Sigma, DFA)$ unter Komplementbildung, Schnitt und Vereinigung abgeschlossen sind, d.h. dass es bei gegebenen DFAs $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zur Erkennung der Sprachen $L(\mathcal{A}_1)$ und $L(\mathcal{A}_2)$ auch DFAs zur Erkennung von

(a) $\overline{L(\mathcal{A}_1)} = \Sigma^* \setminus L(\mathcal{A}_1)$ (b) $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$ (c) $L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$

gibt. Dabei sollen keine NFAs als Zwischenschritte benutzt werden.

15. Komplexität der Potenzmengenkonstruktion

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für $n \geq 2$ sei $\mathcal{A}_n$ der folgende NFA mit der Zustandsmenge $\{1, \ldots, n\}$:



(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich die durch $\mathcal{A}_n$ erkannte Sprache.

(b) (!) Zeigen Sie, dass die Potenzmengenkonstruktion für $\mathcal{A}_n$ einen minimalen Automaten mit 2^n Zuständen liefert.

Hinweis: Seien δ' und F' die bei der Potenzmengenkonstruktion entstehende Übergangsfunktion bzw. Endzustandsmenge. Beweisen Sie für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die folgenden Aussagen:

i. Es gibt ein $w \in \Sigma^*$ mit $\delta'(\{1\}, w) = T$.

ii. Zu jedem $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $S \neq T$ gibt es ein $w \in \Sigma^*$ derart, dass

$$\delta'(S, w) \in F' \text{ genau dann, wenn } \delta'(T, w) \notin F'.$$

Bitte wenden!

B. Hausaufgaben

Die Abgabe der Hausaufgaben ist in Zweiergruppen erlaubt.

16. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ werden die Sprachen MAX(L) und CYCLE(L) definiert: $\boxed{\text{6 Punkte}}$

$$\begin{array}{lcl} \text{MAX}(L) & := & \{u \in \Sigma^* \mid \neg \exists v \in \Sigma^+ .\ uv \in L\} \\ \text{CYCLE}(L) & := & \{vu \in \Sigma^* \mid uv \in L\} \end{array}$$

Zeigen Sie: Falls $L \in \mathcal{L}(\Sigma, DFA)$, so gilt auch

(a) $\text{MAX}(L) \in \mathcal{L}(\Sigma, DFA)$

(b) $\text{CYCLE}(L) \in \mathcal{L}(\Sigma, DFA) = \mathcal{L}(\Sigma, NFA)$

17. Potenzmengenkonstruktion und Minimierung $\boxed{\text{6 Punkte}}$

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{uv \in \sigma^* \mid u \text{ endet mit } b \text{ und } |v|_a \text{ ist ungerade}\}$. Dabei bezeichnet $|v|_a$ die Anzahl der a's im Wort v.

(a) Geben Sie einen NFA $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

(b) Bestimmen Sie mit der Potenzmengenkonstruktion einen zu $\mathcal{A}$ äquivalenten DFA $\mathcal{A}_{\text{det}}$.

(c) Konstruieren Sie aus $\mathcal{A}_{\text{det}}$ den reduzierten Automaten $\mathcal{A}_{\text{red}}$ durch Weglassen von unerreichbaren und Verschmelzen von äquivalenten Zuständen.

(d) Erläutern Sie intuitiv, warum $\mathcal{A}_{\text{red}}$ die Sprache L erkennt.