PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
4. Juli 2003

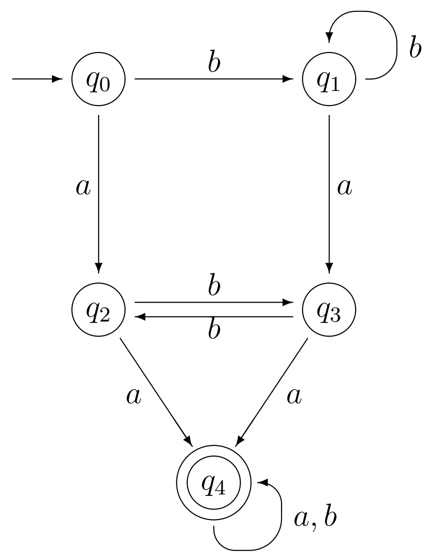
Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2003

Wiederholungsaufgaben

Endliche Automaten und reguläre Sprachen

---

1. Geben Sie deterministische endliche Automaten zur Erkennung der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ an.
   (a) $L_1 = \{x \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } x \notin \{01, 10\}^*\}$.
   (b) $L_2 = \{1^n \mid n = 3k + 5l, k, l \in \mathbb{N}\}$.



2. (a) Minimieren Sie den nebenstehenden deterministischen Automaten.
   (b) Weisen Sie die Minimalität des in (a) konstruierten Automaten nach, indem Sie für jedes Zustandspaar $p \neq q$ ein Wort angeben, welches die Nichtäquivalenz von p und q belegt.
   (c) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck, der die von dem Automaten erkannte Sprache beschreibt.

3. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei $\mathrm{INIT}(L) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. wu \in L\}$.
   (a) Zeigen Sie: Für beliebige Sprachen L und L' gilt:
      i. $\mathrm{INIT}(L \cup L') = \mathrm{INIT}(L) \cup \mathrm{INIT}(L')$
      ii. $\mathrm{INIT}(L \cdot L') = \mathrm{INIT}(L) \cup L \cdot \mathrm{INIT}(L')$
      iii. $\mathrm{INIT}(L^*) = L^* \cdot \mathrm{INIT}(L) \cup \emptyset^*$
   (b) Folgern Sie aus (a), dass für jede reguläre Sprache L auch $\mathrm{INIT}(L)$ regulär ist.

4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen zwischen regulären Ausdrücken (α, β und γ seien beliebige reguläre Ausdrücke über einem Alphabet Σ):
   (a) $\alpha\beta = \beta\alpha$ (b) $(\alpha^*\beta^*)^* \sim (\alpha + \beta)^*$

Typ 0 – 3 Sprachen, Grammatiken und Automaten

---

5. Ordnen Sie folgende Sprachen in die Chomsky-Hierarchie ein. Begründen Sie Ihre Antworten, d. h. weshalb die jeweilige Sprache zu einer Sprachklasse gehört und weshalb sie nicht in die nächst-niedrigere Klasse eingeordnet werden kann.
   - $L_1 = \{a^i b^j \mid i = 2j\}$
   - $L_2 = \{a^i b^j \mid i = 2^j\}$
   - $L_3 = \{a^i b^j \mid i = j \bmod 2\}$

6. Für beliebige Sprachen L_1, L_2 ist ein *Homomorphismus* $h : L_1 \to L_2$ als Abbildung von L_1 nach L_2 definiert mit den Eigenschaften

$$h(\epsilon) = \epsilon; \qquad h(uw) = h(u)h(w) \quad (u, w \in L_1).$$

   (a) Ein Homomorphismus $h : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ sei definiert durch: $h(a) = b, h(b) = ab$. Man bestimme die Werte der Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = |h^n(a)|$.

   (b) Für beliebige Sprachen L_1, L_2, L_3 bzw. einen Homomorphismus h zeige oder widerlege man:

      i. $h(h(L_1)) = h(L_1)$

      ii. $h(L_1L_2) = h(L_1)h(L_2)$

7. Gegeben sei die folgende rechtslineare Grammatik $G_0 = (\{S, A, B, C, F\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$\begin{array}{rrcl@{\qquad}rcl} P: & S & \to & aA \mid bB & C & \to & aS \mid bF \\ & A & \to & bB \mid bC & F & \to & \varepsilon \\ & B & \to & aC & & & \end{array}$$

   (a) Zeigen Sie, dass G nicht eindeutig ist, d.h. dass es ein Wort $w \in L(G_0)$ gibt, für das zwei verschiedene Ableitungen bzgl. G_0 existieren.

   (b) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Konstruktion *eindeutiger* rechtslinearer Grammatiken G' aus rechtslinearen Grammatiken $\mathcal{G}$, so dass $L(G') = L(G)$.

   (c) Wenden Sie dieses Verfahren auf G_0 an.

8. Geben Sie Chomsky-Grammatiken zur Erzeugung der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ an.
   - $L_1 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$
   - $L_2 = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

9. Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathrm{S} & \to & \mathrm{AD} \mid \mathrm{DCB} & \mathrm{C} & \to & \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \mathrm{CC} \\ \mathrm{A} & \to & \mathrm{a} & \mathrm{D} & \to & \mathrm{BB} \mid \mathrm{CD} \\ \mathrm{B} & \to & \mathrm{b} & & & \end{array}$$

   Zeigen Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (CYK), dass das Wort $w = ababb$ in G ableitbar ist.

10. Die Grammatik $\mathcal{G} = (\{S\}, \{(,)\}, P, S)$ mit $\qquad P: \quad S \to () \mid (S) \mid SS$

    erzeugt die Sprache K der wohlgeformten Klammerausdrücke.

    Geben Sie eine ausführlich kommentierte Turingmaschine an, die die Sprache K akzeptiert.

Berechenbarkeitstheorie

---

11. Diskutieren Sie, mit Angabe der Beweisideen, die Entscheidbarkeit des Leerheitsproblems für die Sprachklassen der Chomsky-Hierarchie.

12. Sei L eine deterministisch kontextfreie Sprache und R eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass es entscheidbar ist, ob L gleich R ist.

13. Beweisen Sie: Wären alle formalen Sprachen rekursiv aufzählbar, so wären sie auch entscheidbar.