PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans-Meerwein-Straße
Lahnberge

Klausur zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2003

16. Juli 2003

Hinweise:
- **Bearbeitungszeit:** 110 Minuten
  Gesamtpunktzahl: 80 Punkte

  Zum Bestehen der Klausur sind **32 Punkte** erforderlich.
- Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

Viel Erfolg!

Name: ....

Mat.-Nr.: .... **Studienfach:** ....

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl	korrigiert von
1	10		
2	9		
3	10		
4	7		
5	12		
6	11		
7	10		
8	5		
9	6		
Summe	80		

Note:

1. Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und 10 Punkte

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält kein Teilwort der Form } bba\}.$$

(a) Geben Sie den Zustandsgraphen eines *deterministischen* endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt. / 4

(b) Stellen Sie das reguläre Gleichungs- oder Äquivalenzensystem zu $\mathcal{A}$ auf und leiten Sie daraus einen *möglichst einfachen* regulären Ausdruck $\alpha \in RA(\Sigma)$ mit $[\![\alpha]\!] = L$ ab. / 6

2. Richtig oder falsch? Geben Sie *kurze* Begründungen: 9 Punkte

   (a) Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär. / 2

   (b) Sei k eine feste natürliche Zahl und L eine *beliebige* Sprache über $\Sigma = \{0, 1\}$. Dann ist / 3

   $$Init_k(L) = \{v \mid v \text{ ist Präfix eines Wortes } w \in L \text{ mit } |v| \leq k\}$$

   eine reguläre Sprache.

   (c) Sei C eine *beliebige (!)* Menge regulärer Sprachen. Dann ist auch $\bigcup_{L \in C} L$ regulär. / 4

3. Für $L \subseteq \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei $a \backslash L := \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}$. $\boxed{\text{10 Punkte}}$

(a) Seien $L \subseteq \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie:

i. $\{a\} \cdot (a \backslash L) = L$ / 2

ii. $a \backslash (\{a\} \cdot L) = L$ / 2

(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für welche Sprachen L gilt: $a \backslash L = \emptyset$ / 3

(c) Beweisen Sie, dass $a \backslash L$ regulär ist, falls L regulär ist. / 3

4. Zeigen Sie, dass die Sprache $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$ kontextfrei, aber nicht regulär ist. 7 Punkte

5. Gegeben sei die Chomsky-Grammatik **12 Punkte**

$$G_1 = (\{S, A, B, V, R\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

mit

$$\begin{array}{lllll}
P: & S & \rightarrow & aAR & \\
& A & \rightarrow & aAc & \mid \; B \\
& B & \rightarrow & bBV & \mid \; bV \\
& Vc & \rightarrow & CcV & \\
& VC & \rightarrow & CV & \\
& VR & \rightarrow & CR & \mid \; Cc \\
& cC & \rightarrow & Cc & \\
& bC & \rightarrow & bc &
\end{array}$$

(a) Welche Sprache wird von G_1 erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort. / 6

(b) Ordnen Sie $L(G_1)$ in die Chomsky-Hierarchie ein. / 6

6. Eine Funktion über Sprachen $f : \wp(\Sigma^*) \to \wp(\Sigma^*)$ heißt *schön*, falls gilt: Wenn $f(L)$ regulär ist, so ist L regulär. 11 Punkte

   Zum Beispiel ist die Funktion, die jeder Sprache L ihre Komplementsprache $\Sigma^* \setminus L$ zuordnet, schön, weil die regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, d.h. ist $\Sigma^* \setminus L$ regulär, dann muss auch L regulär sein.

   Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Welche der folgenden Funktionen ist schön? Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) $f_a(L) = \overleftarrow{L} := \{\overleftarrow{w} \mid w \in L\}$. / 2
   Dabei bezeichne $\overleftarrow{w}$ das gespiegelte Wort w.

   (b) $f_b(L) = \{0^{|w|} \mid w \in L\}$ / 3

(c) $f_c(L) = L \cdot [\![0^*]\!]$ / 3

(d) $f_d(L) = \{\overline{w} \mid w \in L\}$ wobei $\overline{w}$ durch bitweises Komplementieren aus w entstehe. (Beispiel: $\overline{101} = 010$.) / 3

7. Geben Sie eine ausführlich dokumentierte Turingmaschine an, die die Sprache $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*, |w| = |w'|\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ erkennt. $\boxed{\text{10 Punkte}}$

8. Die folgende Instanz K des Postschen Korrespondenzproblems besitzt keine Lösung: $\boxed{\text{5 Punkte}}$

$$K = \{(10, 101), (101, 011), (110, 100)\}$$

(a) Erläutern Sie kurz, warum K keine Lösung besitzt. / 3

(b) Geben Sie ein Paar (u, v) an, so dass $K \cup \{(u, v)\}$ eine möglichst kurze Lösung besitzt. Geben Sie diese Lösung an. / 2

9. Sei $L_1, \ldots, L_k$ eine Gruppe von Sprachen über dem Alphabet Σ, so dass gilt: $\boxed{\text{6 Punkte}}$

   (a) Für $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \emptyset$, d.h. die Sprachen sind paarweise disjunkt.

   (b) $\bigcup_{i=1}^{k} L_i = \Sigma^*$.

   (c) Jede der Sprachen L_i mit $1 \leq i \leq k$ ist rekursiv aufzählbar.

   Beweisen Sie, dass jede der Sprachen L_i mit $1 \leq i \leq k$ entscheidbar ist.