PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen, J. Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge
12. November 2002

Übungen zu „Parallelität in funktionalen Sprachen"

Nr. 4, Abgabe: 19. November in der Vorlesung

Abgabe: Die Lösungen sollten grundsätzlich schriftlich, Programme zusätzlich auf Diskette oder per E-Mail an `eden@mathematik.uni-marburg.de` abgegeben werden.
Die Abgabe ist in Gruppen bis zu zwei Personen erlaubt.

Monotonie, Stetigkeit und Striktheit

4.1 Monotonie — 8 Punkte

In welchem der folgenden Fälle ist die Abbildung $\varphi : P \to Q$ monoton?

(a) $P = Q = \langle \mathbf{Z}, \leq \rangle,\ \varphi(x) = x + 1.$

(b) $P = Q = \langle \mathbf{Z}, \leq \rangle,\ \varphi(x) = max(0, x).$

(c) $P = \langle \mathcal{P}(S), \subseteq \rangle$ wobei $|S| > 1, Q = \underline{\mathbf{2}}$,
und $\varphi(U) = 1$ wenn $U \neq \emptyset,\ \varphi(U) = 0$ wenn $U = \emptyset$.
(Dabei sei $\underline{\mathbf{n}} := \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, \leq \rangle$ mit der üblichen Ordnung $0 < 1 < \ldots < n-1$.)

(d) $P = \langle \mathcal{P}(S), \subseteq \rangle$ wobei $|S| > 1, Q = \underline{\mathbf{2}}$,
und $\varphi(U) = 1$ wenn $U = S,\ \varphi(U) = 0$ wenn $U \neq S$.

(e) $P = \langle \mathcal{P}(S), \subseteq \rangle, Q = \underline{\mathbf{3}}, x \in S$ beliebig fest gewählt und $\varphi(U) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \notin U \\ 2 & \text{wenn } U = S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(f) $P = Q = \langle \mathcal{P}(\mathbf{Z}), \subseteq \rangle$, und φ sei definiert durch: $\varphi(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{wenn } 0 \in U, \\ \{1\} & \text{wenn } 1 \in U \text{ und } 0 \notin U, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$

(g) $P = \langle \mathcal{P}(\underline{\mathbf{n}}), \subseteq \rangle, Q = \underline{\mathbf{n}}, \varphi(U) = \begin{cases} sup(U) & \text{wenn } U \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

4.2 Alternative Stetigkeitsaussage — 5 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgende Definition von Stetigkeit äquivalent zu der aus der Vorlesung ist.

> f ist stetig, falls für jede gerichtete Menge $T \subseteq D$ auch das Bild $f(T) := \{f(d) \mid d \in T\}$ gerichtet ist und $f(sup\ T) = sup\ f(T)$.

4.3 Funktionen-Lifting — 7 Punkte

Seien $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ vollständige Halbordnungen und $f : D \to E$ eine stetige Funktion. Wir definieren die *geliftete Funktion* $f_\perp : (D \cup \{\perp\}) \to (E \cup \{\perp\})$ über:

$$f_\perp(d) = \begin{cases} f(d) & , d \in D \\ \perp & , sonst \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $f_\perp : D_\perp \to E_\perp$ dann strikt und stetig ist.