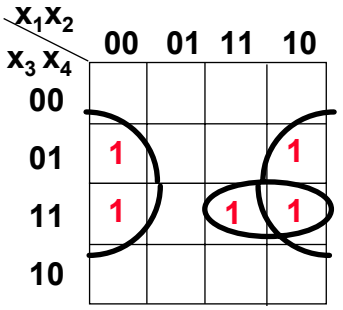
4. Schaltnetze und ihre Optimierung



Synthese von Schaltkreisen
Minimierung
Verfahren von Karnaugh
Unvollständig definierte Schaltfunktionen
Quine-McCluskey Algorithmus
Das Überdeckungsproblem
Fehlerdiagnose
PLAs -Programmable Logic Arrays

Synthese von Schaltkreisen

Zu jeder Schaltfunktion gibt es unendlich viele Boolesche Terme und damit unendlich viele Schaltkreise, die sie realisieren.

Normalformen führen oft zu komplexen Schaltkreisen (man denke z.B. an die Addition von zwei 16Bit Zahlen).

=> "special purpose" Verfahren, Modulkonzept

=> Minimierung von Schaltkreisen:

Bestimmung des einfachsten und billigsten Booleschen Terms bzgl. eines Kostenmaßes

Bewertung von Schaltnetzen

Definition: Sei B(X) die Menge der Booleschen Terme über einer Variablenmenge $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Eine Kostenfunktion $K : B(X) \rightarrow IN$ sei definiert durch:

- $K(x_i) = K(0) = K(1) = 0$
  (Leitungen kostenlos)
- $K(t_1 + t_2) = K(t_1 * t_2) = K(t_1) + K(t_2) + 1$
- $K(t') = K(t)$
  (Negation kostenlos)

Definition eines einfachen Kostenmaßes:

"Kosten Boolescher Terme = Zahl der AND- bzw. OR-Gatter des entsprechenden Schaltkreises"

Negationen, Leitungslängen, Ein- und Ausgänge usw. bleiben unberücksichtigt.

Beispiel:

$K(x_1(x_2+x_3)x_4 + x_3) = K(x_1(x_2+x_3)x_4) + K(x_3) + 1 = \ldots = 4$

Eingeschränktes Minimierungsproblem

Bestimmung der billigsten zweistufigen Realisierung einer Schaltfunktion, d.h. eine Realisierung, bei der zunächst nur AND-Gatter und anschließend nur OR-Gatter oder umgekehrt durchlaufen werden. Die disjunktive und konjunktive Normalform gehören zu den zweistufigen Realisierungen. Im folgenden betrachten wir nur Vereinfachungen der disjunktiven Normalform.

Definition: P(X) ist die Menge der polynomiellen Booleschen Terme über der Variablenmenge $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

$$P(X) = \{ p \mid p = 0 \vee p = 1 \vee p = a_1 + \ldots + a_m \text{ mit } a_i = x_{i_1}^{\varepsilon i_1} * \ldots * x_{i_k}^{\varepsilon i_k} \}$$

a_i heißt Monom.

Ein billigstes Polynom zur Realisierung von f heißt Minimalpolynom von f.

Beispielpolynome

- **Die disjunktive Normalform einer Schaltfunktion ist ein Polynom, bei dem jedes Monom ein Minterm ist.**
- **Das Polynom $p = x_1´x_3 + x_2 x_3´$ definiert die Schaltfunktion**

x1	x2	x3	$x_1´x_3 + x_2 x_3´$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

disjunktive Normalform:

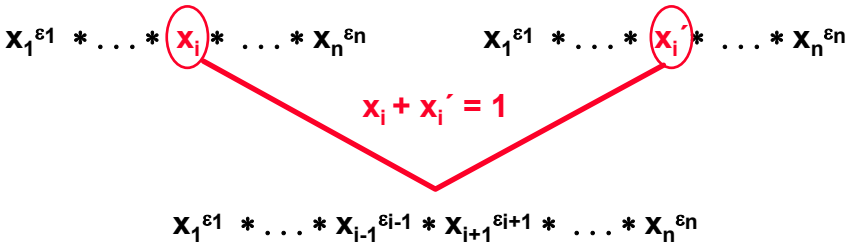
$$x_1´x_2´x_3 + x_1´x_2x_3´ + x_1´x_2x_3 + x_1x_2x_3´$$

Vereinfachung:

$$= x_1´(x_2´+x_2)x_3 + (x_1´+x_1)x_2x_3´$$
$$= x_1´1x_3 + 1\, x_2\, x_3´$$
$$= x_1´x_3 + x_2\, x_3´$$

Resolutionsregel

Kommen in einem Polynom zwei Monome vor, die sich in genau einer komplementären Variablen unterscheiden, so können diese beiden Monome durch den ihnen gemeinsamen Teil ersetzt werden.



Beispielresolutionen

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$= x_1 x_2' x_3 x_4 + x_1 x_2' x_3' x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1' x_2' x_3' x_4 + x_1' x_2' x_3 x_4$

$= x_1 x_2' x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2' x_3' x_4 + x_1' x_2' x_4$

$= x_2' x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2' x_3' x_4$

Eine mehrfache Verwendung der Resolutionsregel beruht auf dem Gesetz $x + x = x$.

Das Verfahren von Karnaugh

Mit Hilfe einer graphischen Darstellung der Funktionstafel von Schaltfunktionen mit 3 oder 4 Argumenten erhält man eine Übersicht über mögliche Resolutionen.

Ein Karnaugh-Diagramm einer Schaltfunktion f : $\underline{2}^n$ -> $\underline{2}$ mit 3<=n<=4 ist eine graphische Darstellung der Funktionstafel durch eine 0-1-Matrix der Größe 2x4 für n=3 und 4x4 für n=4 mit folgender Beschriftung:

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0				
1				

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Das Verfahren von Karnaugh 2

Beispiel:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_1 x_2' x_3 x_4 + x_1 x_2' x_3' x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1' x_2' x_3' x_4 + x_1' x_2' x_3 x_4$

Karnaugh-Diagramm zu f:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				
01	1			1
11	1		1	1
10				

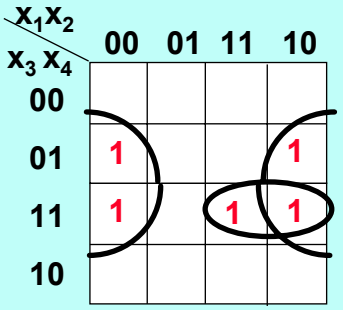
Bei der Zeilen- und Spaltenbeschriftung wird der zweistellige Gray-Code verwendet, d.h. zwei zyklisch benachbarte Zeilen oder Spalten unterscheiden sich in genau einer Komponente.

Je zwei benachbarte Einsen liefern eine Resolution.

Das Verfahren von Karnaugh 3

Man überdeckt alle im Karnaugh-Diagramm auftretenden Einsen durch möglichst große Blöcke der Form 2^r x 2^s und bildet die diesen Blöcken entsprechenden Monome. Dies liefert eine vereinfachte Darstellung der Funktion, denn die Blöcke entsprechen jeweils 2^r x 2^s Mintermen, die durch sukzessive Resolutionen vereinfacht werden können.

Karnaugh-Diagramm zu f:



Viererblock: $x_2´x_4$

Zweierblock: $x_1x_3x_4$

=> vereinfachte Darstellung:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_2´x_4 + x_1x_3x_4$

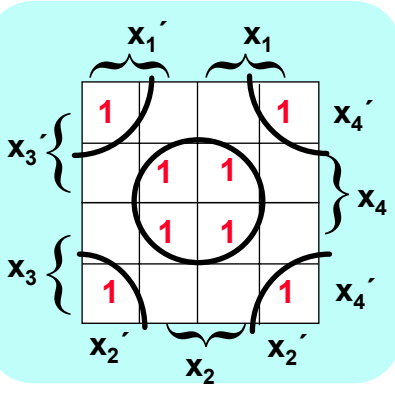
Alternative Beschriftung

Oft verwendet man zur Zeilen- bzw. Spaltenbeschriftung statt der Variablenwerte die Variablen selbst und zwar bezeichnet man die Spalten bzw. Zeilen mit x, für die die Variable x den Wert 1 annimmt (und die anderen mit x´).

Beispiel:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_1´ x_2´ x_3´ x_4´ + x_1 x_2´ x_3´ x_4´$
$+ x_1´ x_2 x_3´ x_4 + x_1 x_2 x_3´ x_4$
$+ x_1´ x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$
$+ x_1´ x_2´ x_3 x_4´ + x_1 x_2´ x_3 x_4´$

$= x_2 x_4 + x_2´x_4´$



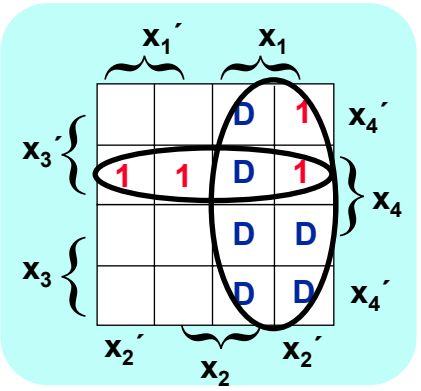
Don´t Care-Einträge

Schaltfunktionen sind nicht immer für alle möglichen Eingabetupel definiert. Die Argumenttupel, für die durch die Problemstellung kein Funktionswert festgelegt wird, bezeichnet man als "Don´t Care"-Fälle, da man beim Entwurf eines Schaltkreises für diese Argumente willkürlich Funktionswerte festsetzen kann.

Beispiel: f sei für 0<=x<=9 definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{1,5,8,9\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_3\,´x_4$$



Implikanten und Primimplikanten

Ein Monom a heißt Implikant von f,
falls $a(x_1, \ldots, x_n) <= f(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in \underline{2}$

Ein Implikant a von f heißt Primimplikant (von f),
falls kein Teilmonom von a Implikant von f ist.

Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_1\,x_2´\,x_3\,x_4 + x_1\,x_2´\,x_3´\,x_4 + x_1\,x_2\,x_3\,x_4$
$+ x_1´\,x_2´\,x_3´\,x_4 + x_1´\,x_2´\,x_3\,x_4$

Implikanten von f:

$x_1\,x_2´\,x_3\,x_4$, $x_1\,x_2´\,x_3´\,x_4$, $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$,
$x_1´\,x_2´\,x_3´\,x_4$, $x_1´\,x_2´\,x_3\,x_4$,
$x_1\,x_2´\,x_4$, $x_1´\,x_2´\,x_4$, $x_1\,x_3\,x_4$, **Primimplikanten**
$x_2´\,x_3´\,x_4$, $x_2´\,x_3\,x_4$, $x_2´\,x_4$

Bestimmung von Minimalpolynomen

Karnaugh:

- **rechteckige Blöcke von Einsen ==> Implikanten**
- **maximale derartige Blöcke ==> Primimplikanten.**

Das eingeschränkte Minimierungsproblem wird somit für n = 3 und 4 auf die Bestimmung von Primimplikanten zurückgeführt. Dass dies Kostenminimalität garantiert, zeigt der folgende Satz:

Satz: Sei $f : \underline{2}^n \rightarrow \underline{2}$ eine Schaltfunktion, nicht konstant 0.

Ist $M_1 + M_2 + \ldots + M_k$ Minimalpolynom von f,

so sind die M_i $(1 \leq i \leq k)$ Primimplikanten von f.

Quine-McCluskey-Algorithmus

Eingabe: Schaltfunktion $f : \underline{2}^n \rightarrow \underline{2}$ mit n beliebig

Ausgabe: Minimalpolynom für f

Methode:

I.) Bestimmung aller Primimplikanten von f

» wiederholte Anwendung der Resolutionsregel

II.) kostenminimale Auswahl von Primimplikanten

» Überdeckung der Minterme durch Primimplikanten

schwieriges Problem

Quine-McCluskey - Phase I

I.1) Teile die Minterme der disjunktiven Normalform von f anhand der Anzahl der vorkommenden Negationszeichen in Gruppen ein.

Beispiel:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_1 x_2 x_3 x_4'$
$+ x_1 x_2 x_3' x_4$
$+ x_1 x_2 x_3' x_4'$
$+ x_1' x_2' x_3 x_4'$
$+ x_1' x_2 x_3' x_4'$
$+ x_1' x_2 x_3 x_4'$
$+ x_1 x_2' x_3 x_4$

Gruppeneinteilung:

Gruppe	Minterme	einschlägiger Index dual	dezimal
1	$x_1 x_2' x_3 x_4$	1011	11
	$x_1 x_2 x_3' x_4$	1101	13
	$x_1 x_2 x_3 x_4'$	1110	14
2	$x_1' x_2 x_3 x_4'$	0110	6
	$x_1 x_2 x_3' x_4'$	1100	12
3	$x_1' x_2 x_3' x_4'$	0100	4
4	$x_1' x_2' x_3' x_4'$	0000	0

Quine-McCluskey - Phase I (Forts.)

I.2) Betrachte alle Mintermpaare aus benachbarten Gruppen und versuche die Resolutionsregel anzuwenden.

Bilde eine neue Tabelle, in der alle verkürzten Implikanten eingetragen werden. Ferner werden Monome, auf die die Resolutionsregel nicht mehr anwendbar ist, übernommen.

Beispiel (Forts.):

Gruppe	Implikanten	einschlägige Indices dual	dezimal
1	$x_1 x_2' x_3 x_4$	1011	11
	$x_1 x_2 x_3'$	110*	13, 12
	$x_2 x_3 x_4'$	*110	14, 6
	$x_1 x_2 x_4'$	11*0	14, 12
2	$x_1' x_2 x_4'$	01*0	4, 6
	$x_2 x_3' x_4'$	*100	4, 12
3	$x_1' x_3' x_4'$	0*00	0, 4

Quine-McCluskey - Phase I (Forts. 2)

I.3) Iteriere Schritt I.2, bis sich die Tabelle nicht mehr ändert.
=> Die Tabelle enthält dann genau die Primimplikanten.

Beispiel (Forts.):

Gruppe	Implikanten	einschlägige Indices dual	dezimal
1	$x_1\, x_2'\, x_3\, x_4$	1011	11
	$x_1\, x_2\, x_3'$	110*	13, 12
	$x_2\quad x_4'$	*1*0	4,6,12,14
3	$x_1'\quad x_3'\, x_4'$	0*00	0, 4

Quine-McCluskey - Phase II

II.1) Man erstelle eine Matrix (a_{ij}) mit
- » Primimplikanten p_i als Zeilen und
- » Mintermen m_j der DNF als Spalten

wobei $a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } m_j <= p_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel (Forts.):

Primimplikant \ Minterm	0	4	6	11	12	13	14
$x_1\, x_2'\, x_3\, x_4$	0	0	0	1	0	0	0
$x_1\, x_2\, x_3'$	0	0	0	0	1	1	0
$x_2\quad x_4'$	0	1	1	0	1	0	1
$x_1'\quad x_3'\, x_4'$	1	1	0	0	0	0	0

Quine-McCluskey - Phase II (Forts.)

II.2) Finde in dieser Matrix eine Auswahl von Zeilen, d.h. Primimplikanten, so dass

(i) die von diesen Zeilen gebildete Teilmatrix in jeder Spalte mindestens eine Eins enthält und

(ii) die Gesamtkosten dieser Primimplikanten minimal sind unter allen möglichen Auswahlen mit (i)

Beispiel (Forts.):

Primimplikant \ Minterm	0	4	6	11	12	13	14
$x_1\, x_2'\, x_3\, x_4$	0	0	0	1	0	0	0
$x_1\, x_2\, x_3'$	0	0	0	0	1	1	0
$x_2\quad x_4'$	0	1	1	0	1	0	1
$x_1'\quad x_3' x_4'$	1	1	0	0	0	0	0

Vereinfachungsregeln

1 Ein Primimplikant heißt wesentlich, falls es einen Minterm gibt, der nur von diesem Primimplikanten überdeckt wird. In der entsprechenden Matrixspalte findet sich nur eine 1.

=> Ein wesentlicher Primimplikant muß zum Minimalpolynom gehören.

2 Gilt für Mintermspalten s_i und s_j komponentenweise $s_i <= s_j$, so streiche s_j, denn jede Überdeckung von s_i überdeckt auch s_j.

	...	m_i	...	m_j
p_1		1		1
p_2		0		0
p_3		1		1
p_4		0		1

	m1	m2	m3	...
...				
pr	0	1	1	0
...				
ps	0	1	1	1
...				

3 Ist für Primimplikantenzeilen $z_r <= z_s$ und $K(z_r) >= K(z_s)$, so streiche z_r, denn z_s ist billiger und leistungsfähiger.

Überdeckungsmatrix

Eine 0-1-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$ heißt eine ***Überdeckungsmatrix***, falls
(a) alle Spalten voneinander verschieden sind
(b) die Nullspalte fehlt.

Die Spalten einer solchen Matrix heißen ***Objekte,*** die Zeilen (Überdeckungs-) ***Mengen***. Eine Menge i ***überdeckt*** das Objekt j :<=> a_{ij} =1.

Bsp (Quine/McCluskey): Objekte = einschlägige Minterme
Mengen = Primimplikanten

Primimplikant \ Minterm	0	4	6	11	12	13	14
$x_1\, x_2'\, x_3\, x_4$	0	0	0	1	0	0	0
$x_1\, x_2\, x_3'$	0	0	0	0	1	1	0
$x_2 \quad x_4'$	0	1	1	0	1	0	1
$x_1' \quad x_3'\, x_4'$	1	1	0	0	0	0	0

Das Überdeckungsproblem

spezielles Überdeckungsproblem:
Suche möglichst wenige Mengen, die alle Objekte überdecken.

allgemeiner: Die Mengen i haben Kosten K(i) (auch Gewichte genannt).

allgemeines Überdeckungsproblem:
Suche überdeckendes Mengensystem M mit möglichst geringen Gesamtkosten $\sum_{\{i \in M\}} K(i)$

Bsp.

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	1	0	1
3	0	1	1	1
4	0	1	0	1
5	1	0	0	1

$\forall i\ .\ K(i) = 1$

Beobachtung:
$z_i <= z_j$ (elementweises <=) bedeutet:
z_j überdeckt alles, was z_i überdeckt

$s_i <= s_j$ (elementweises <=) bedeutet:
s_j wird immer überdeckt,
wenn s_i überdeckt wird

Im Beispiel gilt: z1 <= z2, s1 <= s4

Vereinfachungsregeln

Zeilenregel: $Z_i \leq Z_j \wedge K(i) \geq K(j) \Rightarrow$ streiche Z_i

Die Menge Z_j überdeckt alles,
was Z_i überdeckt und ist billiger.
Z_i ist also entbehrlich.

Spaltenregel: $S_i < S_j \Rightarrow$ streiche S_j

Das Objekt S_j wird immer überdeckt,
wenn S_i überdeckt wird.
Deshalb braucht S_j nicht betrachtet zu werden.

Die sukzessive Anwendung von Zeilen- und Spaltenregel liefert ein ***nichtdeterministisches*** Verfahren zur Vereinfachung der Überdeckungsmatrix.

Das Verfahren terminiert auf jeden Fall mit einer nicht weiter zu vereinfachenden Matrix (=> ***irreduzible*** Matrix).

Komplexität des Überdeckungsproblems

Das Überdeckungsproblem ist ***NP-vollständig,*** d.h., es ist nicht bekannt, ob es einen polynomiellen (d.h. effizienten) Algorithmus zur Lösung dieses Problems gibt. ***Wahrscheinlich nicht!***

P: polynomiell lösbare Probleme
NP: nicht-deterministisch polynomiell lösbare Probleme

Es lässt sich für *irgendeine* optimale Lösung des Problems in polynomieller Zeit (nichtdet., d.h. in Entscheidungssituationen von "außen" richtig gesteuert) verifizieren, dass es sich tatsächlich um eine Optimallösung handelt.

NP-vollständige Probleme: Es ist bewiesen, dass es *entweder für alle* Probleme dieser Klasse *oder für keines* von ihnen ein polynomielles (deterministisches) Lösungsverfahren gibt.

ungelöstes Problem der Informatik: $P \stackrel{?}{=} NP$

klar $P \subseteq NP$
Vermutung $P \neq NP$, aber noch nicht bewiesen.

Fehlerdiagnose in Schaltkreisen

VLSI-Design, Endkontrolle von Chips, Funktionstest nach Fertigung

Beispiel: 16-Bit Addierer ⇨ 2^{32} mögl. Eingaben, aber 4 Mrd. Test nicht durchführbar

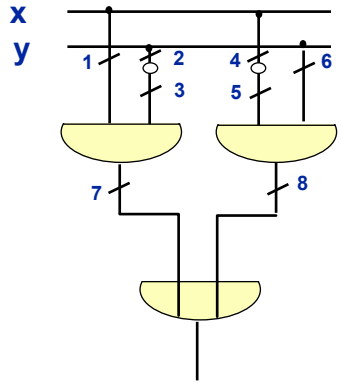
⇨ Wähle Teilmenge von Tests aus, die alle Fehler einer bestimmten Art aufdeckt

Dazu macht man meist eine bestimmte *Fehlerannahme*, etwa

(a) es tritt höchstens ein Fehler auf ("1-Fehler Annahme")
(b) der Defekt ist ein gerissener Verbindungsdraht (oder z.B. defektes Gatter, Kurzschluß ...)

Beispiel

Halbaddierer (S-Ausgang) S = xy' + x'y



8 mögl. Leitungsrisse (0-Verklemmungen)
3 mögl. Gatterfehler

Fehlerterme:
S_i = Ergebnis bei diesem Fehler
Ein-Fehler-Annahme!

$$S_1 = 0 \bullet y' + x'y = x'y$$
$$S_2 = x \bullet 1 + x'y = x + x'y = x + y$$
$$S_3 = x \bullet 0 + x'y = x'y$$
$$S_4 = xy' + 1 \bullet y = xy' + y = x + y$$
$$S_5 = xy' + 0 \bullet y = xy'$$
$$S_6 = xy' + x' \bullet 0 = xy'$$
$$S_7 = 0 + x'y = x'y$$
$$S_8 = xy' + 0 = xy'$$

Überprüfung dieser Fehlerfälle in der Ausfallmatrix

x	y	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

Fehlermatrix: Ersetze Si durch Si $\oplus$ S

x	y	$S_1 \oplus S$	$S_2 \oplus S$	$S_5 \oplus S$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

Testvektoren: minimale Zeilenauswahl, die alle Einsen überdeckt.

==> 3 Testvektoren 01, 10, 11 sind notwendig, um alle Fehler zu finden.

Optimierung von Schaltkreisen

bisher:

- Beschleunigung durch zusätzliche Hardware
- Minimierung durch Bestimmung von Minimalpolynomen
- "Fehlerdiagnose"

jetzt: technische Funktionssicherheit

Annahmen:

» Jedes Signal, das ein Gatter durchläuft, hat eine Laufzeit.

» Änderung von Eingabewerten, die logisch gleichzeitig erfolgen, können physikalisch nacheinander stattfinden.

» Signallaufzeiten können für unterschiedliche Gatter unterschiedlich groß sein.

=> Hazards (Hasards, engl. Gefahr, Risiko):

unerwünschte Änderungen von Ausgangswerten beim Umschalten von Eingabesignalen.

Hazards

- **Funktionshazards:**
  schaltungsunabhängig, Folgerung aus Annahme 2

Beispiel: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_3 + x_2\, x_3'$

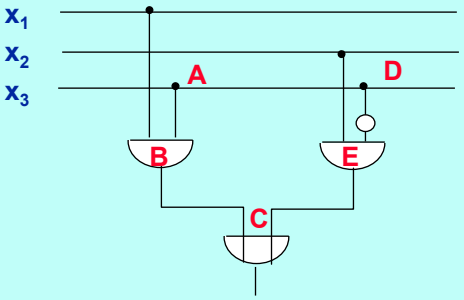
$x_1\, x_2$ / x_3	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

Primimplikanten: $x_1\, x_3$, $x_2\, x_3'$, $x_1\, x_2$

Es gilt auch:
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_3 + x_2\, x_3' + x_1\, x_2$

- **Schaltungshazards:**
  schaltungsabhängig,
  Folgerung aus Annahme 3

Beispiel: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_3 + x_2\, x_3'$

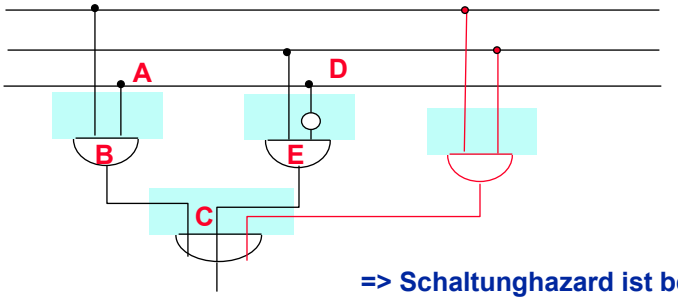


f (1,1,0) = f(1,1,1) = 1, aber Ausgang kurzzeitig auf 0, falls Signalweg ABC langsamer als DEC

Eliminierung von Schaltungshazards

Schaltunghazards können durch Hinzunahme von zusätzlichen Primimplikanten als "Gegenschaltung" eliminiert werden,
im Beispiel:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_3 + x_2\, x_3' = x_1\, x_3 + x_2\, x_3' + x_1\, x_2$$



=> Schaltunghazard ist beseitigt

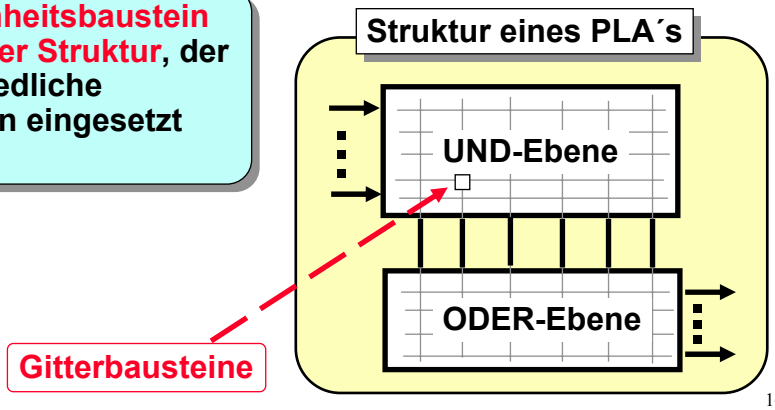
Satz (Eichelberger 1969):
Ein zweistufiges Schaltnetz S für eine Schaltfunktion f in Polynomform ist frei von Schaltungshazards, falls die UND-Gatter (Monome) in einer 1-1-Korrespondenz zu den Primimplikanten von f stehen.

Programmable Logic Arrays (PLA´s)

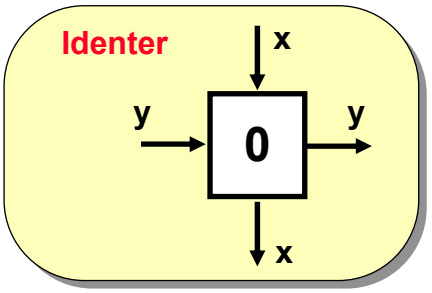
bisher: Schaltfunktion -> DNF -> Minimalpolynom
-> zweistufige Realisierung

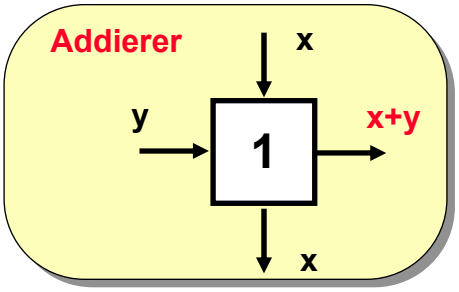
Problem: unterschiedlich formatierte Gatter erschweren
automatisierte Herstellung mit Halbleitertechnik

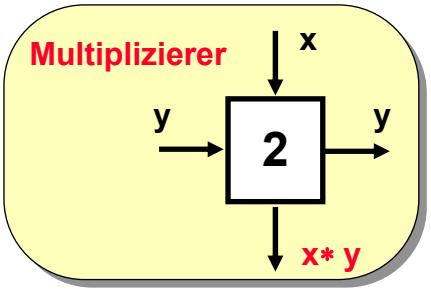
Entwickle Einheitsbaustein mit homogener Struktur, der für unterschiedliche Anwendungen eingesetzt werden kann.

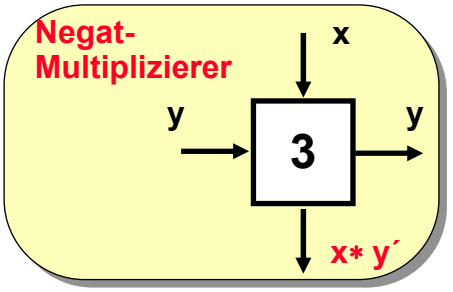


Gitterbausteine

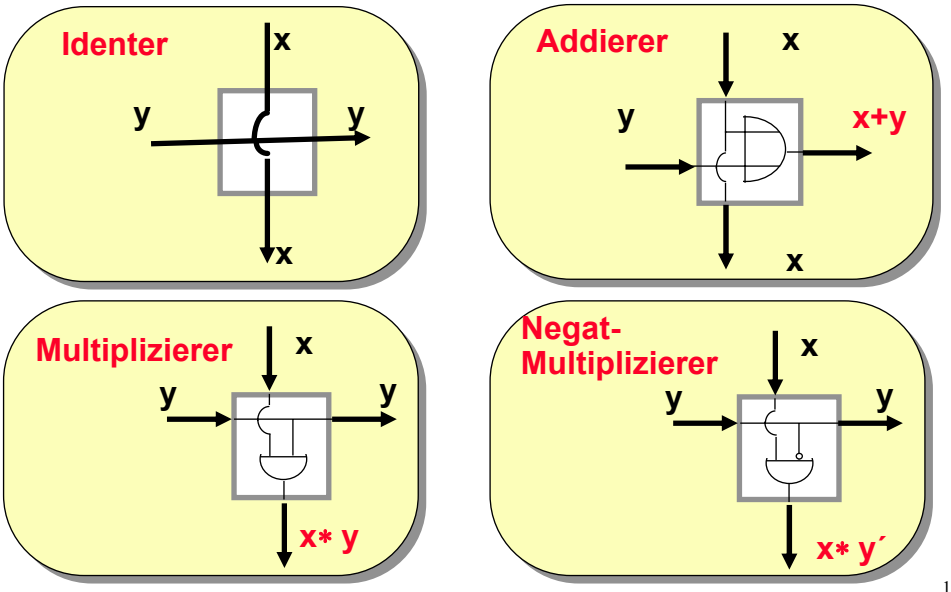








Realisierung der Gitterbausteine



Realisierung von Schaltfunktionen mit PLA´s

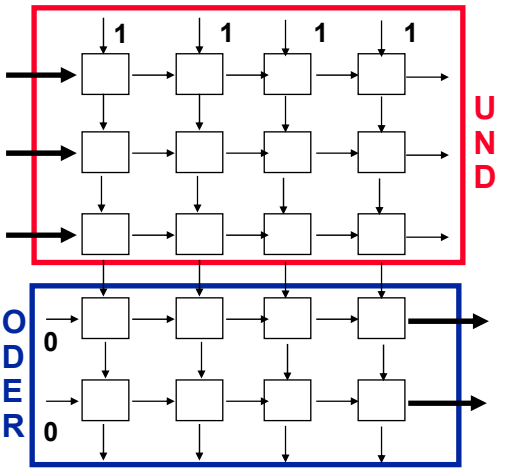
Zur Realisierung einer Schaltfunktion

f: 2^n -> 2^m

benötigt man ein PLA mit

- n Inputs,
- m Outputs und
- 1 <= k <= 2^n Spalten.

Beispiel: n=3, m=2, k = 4



In der UND-Ebene werden nur Identer und Multiplizierer verwendet, in der ODER-Ebene nur Identer und Addierer.

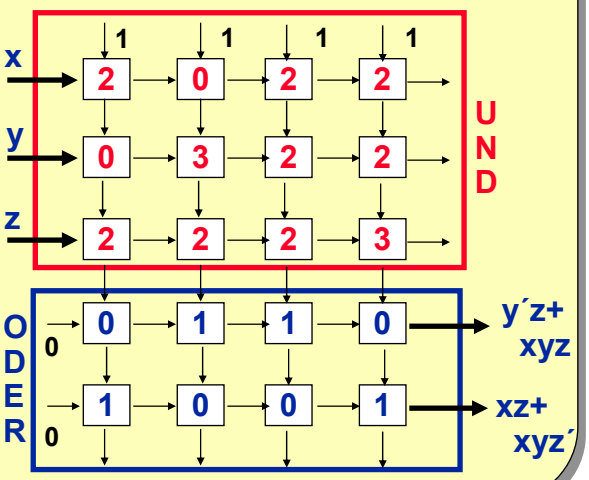
Beispiel

Sei f: $\underline{2}^3$ -> $\underline{2}^2$ definiert durch

f(x,y,z) = (y´z+xyz, xz+xyz´).

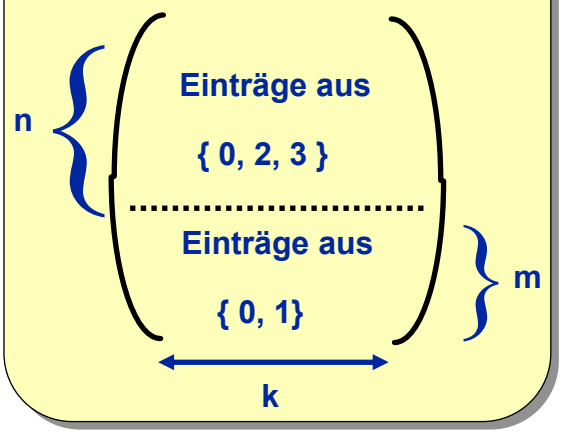
In den Spalten der Und-Ebene werden die Produktterme erzeugt, in den Zeilen der Oder-Ebene die Summen. Eine Funktion in DNF kann somit direkt in einem PLA realisiert werden.

PLA zur Realisierung von f:



Logische Beschreibung von PLA´s

Die Beschreibung von PLA´s erfolgt meist durch eine (n+m) × k Matrix, in der nur die Typen der Gitterbausteine vermerkt werden:

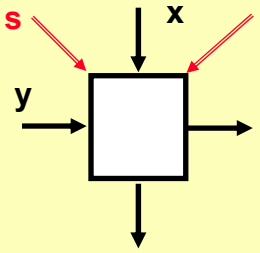


<u>Beispiel</u> (Forts.): Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

realisiert die obige Beispielfunktion f.

Programmierbare Bausteine



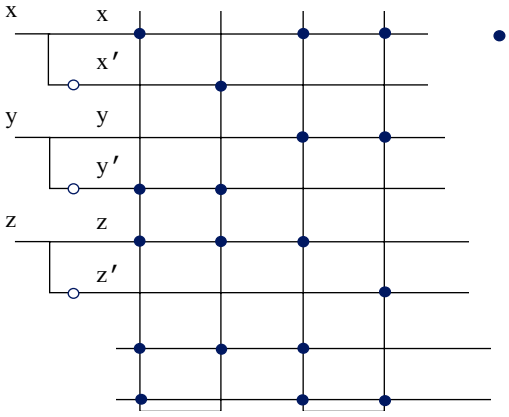
Die Steuereingänge s und t bestimmen das Verhalten des Bausteins:

s	t	Typ
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

PLA-Satz

Durch geeignete Eintragungen in die PLA-Matrix kann jede Schaltfunktion (der gewünschten Dimensionierung) realisiert werden.

PLAs - Variante der Darstellung



- ist **Multiplizierer** in UND-Ebene und **Addierer** in ODER-Ebene

nur noch 1 Steuerleitung pro Gitterbaustein

$xy'z + x'y'z + xyz$

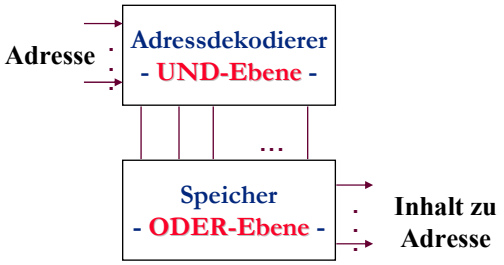
$xy'z + xyz + xyz'$

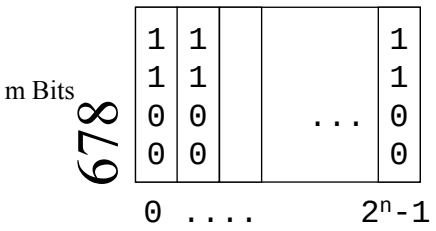
ROMs als spezielle PLAs

ROM - Festspeicher mit Adressen der Länge *n*

➔ 2^n Werte der Länge m

➔ m x 2^n Matrix, deren Spalten den Adressen 0 bis 2^n-1 entsprechen





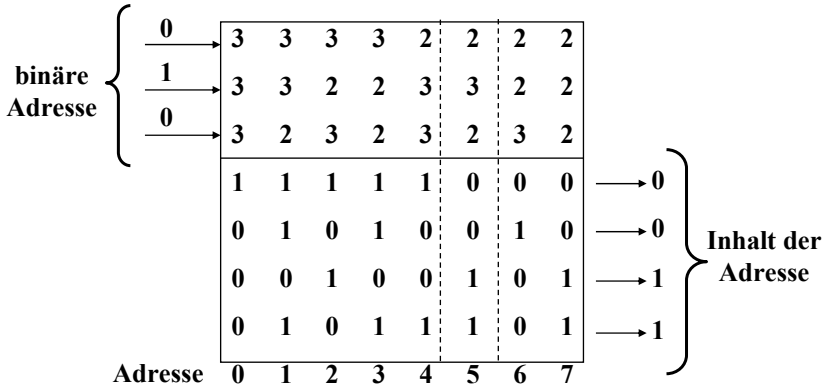
... kann als Oder-Teil eines PLAs aufgefaßt werden.

678

Durch Hinzunahme eines UND-Teils der Dimension *n x* 2^n erhält man ein PLA mit *n* Eingaben, m Ausgaben und 2^n Spalten.

Die UND-Ebene realisiert einen Adressdekodierer, wenn in jeder Spalte genau der Minterm erzeugt wird, der diese Spalte dual codiert.

Beispiel: *n = 3, m = 4*



Bei Eingabe einer Adresse i in Dualdarstellung wird genau in der i-ten Spalte eine 1 erzeugt, so dass der in der Oder-Ebene stehende Wert ausgegeben wird.

Es ist sogar nur eine Steuerleitung pro Gitterpunkt notwendig, da in der UND-Ebene kein Identer vorkommt.