

Vollständige Halbordnungen

Eine *Halbordnung* $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ (D für „domain“ (Bereich)) besteht aus

- einer nicht-leeren Menge D und
- einer reflexiven, antisymmetrischen und transitiven Relation \leq auf D .

Sei $A \subseteq D, a \in D$.

- a heißt *obere Schranke* von A , falls $\forall b \in A : b \leq a$.
- a heißt *kleinstes Element* von A , falls $a \in A$ und $\forall b \in A : a \leq b$.
- A heißt *gerichtet*, falls $A \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in A \exists c \in A : a \leq c \wedge b \leq c$.

Besitzt die Menge aller oberen Schranken von A ein kleinstes Element, so heißt dieses *kleinste obere Schranke von A* (least upper bound), in Zeichen: $\sqcup A$ oder $\text{lub } A$.

Eine Halbordnung $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ heißt *vollständig*, falls

- (i) \mathcal{D} ein kleinstes Element $\perp_D \in D$ besitzt und
- (ii) jede gerichtete Teilmenge $A \subseteq D$ in D eine kleinste obere Schranke $\sqcup A \in D$ hat.

Eine Halbordnung $\mathcal{D} = \langle D_\perp, \leq \rangle$ heißt *flach*, falls $D_\perp = D \cup \{\perp_D\}$ und

$$\forall a, b \in D_\perp : a \leq b \iff a = \perp_D \vee a = b.$$

Beispiele:

- (\mathbb{N}, \leq) ist eine Halbordnung mit kleinstem Element, aber nicht vollständig.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ mit nicht-leerem M ist eine vollständige Halbordnung.

-  ist eine vollständige Halbordnung.

- flache Halbordnung $D_{\perp} = D \cup \{\perp^D\}$

$D : \dots d_1 \dots d_2 \dots$ mit $a \leq b \Leftrightarrow a = \perp \vee a = b$



Stetige und strikte Funktionen

Seien $\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leq_i \rangle$ ($1 \leq i \leq 2$) vollständige Halbordnungen.

Eine Abbildung $f : D_1 \rightarrow D_2$ heißt *stetig*, falls

- (i) f *monoton* ist, d.h. $\forall a, b \in D_1 : a \leq_1 b \longrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$,
und
- (ii) für alle gerichteten Teilmengen $A \subseteq D_1$ gilt:

$$f(\sqcup A) = \sqcup f(A).$$

Da A gerichtet und f monoton ist, folgt, dass

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

gerichtet ist, und somit existiert $\sqcup f(A)$.

$$\begin{array}{ccc} D_1 & & D_2 \\ & f & \\ A & \longrightarrow & f(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup A & \longrightarrow & \sqcup f(A) \\ & f & \end{array}$$

Eine Abbildung $f : D_1 \rightarrow D_2$ heißt *strikt*, falls $f(\perp_{D_1}) = \perp_{D_2}$.

Beispiel:

strikte Funktionen auf flachen Halbordnungen $f : D_1 \rightarrow D_2$

$$\begin{array}{ccc} D_1 : \dots\dots\dots & \xrightarrow{f} & \dots\dots\dots : D_2 \\ & & \\ & \searrow & \searrow \\ & \perp^{D_1} & \perp^{D_2} \\ & \nearrow & \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{— Striktheit} \\ \longrightarrow \end{array}$$

gerichtete Teilmengen in D_1 :

$$\begin{array}{ll} \{\perp^{D_1}\} & \mapsto \{\perp^{D_2}\} \\ \{\perp^{D_1}, a\} & \mapsto \{\perp^{D_2}, b\} \quad (b = \perp^{D_2} \text{ ist m\u00f6glich.}) \\ \{a\} & \mapsto \{b\} \quad (b \in D_2 \cup \{\perp^{D_2}\}) \end{array}$$

Strikte Funktionen auf flachen Halbordnungen sind also stetig.

Fixpunktsatz von Tarski

Sei $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ eine vollständige Halbordnung und $f : D \rightarrow D$ stetig.

Dann existiert

$$\sqcup \{f^i(\perp_D) \mid i \geq 0\} =: \text{fix } f \in D$$

und ist **kleinster Fixpunkt von f** , d.h.

$$f(\text{fix } f) = \text{fix } f \text{ und } \forall a \in D : f(a) = a \Rightarrow \text{fix } f \leq a.$$

Beweis:

1. Existenz von $\text{fix } f$:

Da \perp_D kleinstes Element von D ist, gilt: $\perp_D \leq f(\perp_D)$.

Wegen der Monotonie von f folgt: $f(\perp_D) \leq f(f(\perp_D))$, also:

$$\forall i \geq 0 : f^i(\perp_D) \leq f^{i+1}(\perp_D),$$

d.h. $\{f^i(\perp_D) \mid i \geq 0\}$ ist gerichtet und

da $\langle D, \leq \rangle$ vollständig, existiert $\sqcup \{f^i(\perp_D) \mid i \geq 0\}$.

2. $\text{fix } f$ ist Fixpunkt von f :

Wegen der Stetigkeit von f gilt:

$$\begin{aligned} f(\sqcup \{f^i(\perp_D) \mid i \geq 0\}) &= \sqcup f(\{f^i(\perp_D) \mid i \geq 0\}) \\ &= \sqcup \{f^{i+1}(\perp_D) \mid i \geq 0\} \\ &= \text{fix } f, \text{ da } \perp_D \leq f^{i+1}(\perp_D) \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

3. $\text{fix } f$ ist kleinster Fixpunkt von f :

Sei $d \in D$ Fixpunkt von f , d.h. $f(d) = d$. Es gilt $\perp_D \leq d$ und

wegen der Monotonie von f folgt: $f^i(\perp_D) \leq f^i(d) = d$.

d ist also obere Schranke von $\{f^i(\perp_D) \mid i \geq 0\}$ und somit ist $\text{fix } f$ als kleinste obere Schranke dieser Menge $\leq d$.

Funktionen-, Summen- und Produktraum

Mit den vollständigen Halbordnungen $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \leq_1 \rangle$ und $\mathcal{D}_2 = \langle D_2, \leq_2 \rangle$ ist auch der **Funktionsraum**

$$[\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2] := \langle \{f : D_1 \rightarrow D_2 \mid f \text{ stetig} \}, \leq \rangle$$

mit $f \leq g :\Leftrightarrow \forall a \in D_1 : f(a) \leq_2 g(a)$ eine vollständige Halbordnung.

Mit den vollständigen Halbordnungen $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \leq_1 \rangle$ und $\mathcal{D}_2 = \langle D_2, \leq_2 \rangle$ sind auch die

- **verschmelzende Summe (coalesced sum)**

$$[\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2] := \langle D_1 \oplus D_2, \leq \rangle$$

mit $D_1 \oplus D_2 := \{(i, d) \mid i \in \{1, 2\}, d_i \in D_i, d_i \neq \perp_{D_i}\} \cup \{\perp\}$

$$a \leq b :\Leftrightarrow a = \perp \vee (\exists i \in \{1, 2\} : a = (i, d_i) \wedge b = (i, d'_i) \wedge d_i \leq d'_i)$$

und die

- **disjunkte Summe (disjoint sum)**

$$[\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2] := \langle D_1 + D_2, \leq \rangle$$

mit $D_1 + D_2 := \{1\} \times D_1 \cup \{2\} \times D_2 \cup \{\perp\}$

$$a \leq b :\Leftrightarrow a = \perp \vee (\exists i \in \{1, 2\} : a = (i, d_i) \wedge b = (i, d'_i) \wedge d_i \leq d'_i)$$

vollständige Halbordnungen.

Mit den vollständigen Halbordnungen $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \leq_1 \rangle$ und $\mathcal{D}_2 = \langle D_2, \leq_2 \rangle$ ist auch der **Produktraum**

$$\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 := \langle D_1 \times D_2, \leq \rangle$$

mit $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 \leq_1 a_2 \wedge b_1 \leq_2 b_2$ eine vollständige Halbordnung.