Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2014

Übungen zur Algebra II

– Blatt 2 –

Abgabe: Dienstag, den 29.04.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeige, dass die Transformation $(Tf)(X) := f(X+1)$ ein Ring-Automorphismus von $K[X]$ ist. Beachte: Ein Polynom ist formal nur durch seine Koeffizienten in K bestimmt. Daher muss T zunächst mittels seiner Wirkung auf Koeffizienten definiert werden. Auch die Homomorphie-Eigenschaft muss im Prinzip über die Koeffizienten erfolgen.

b) Wie sieht die inverse Transformation T^{-1} von $K[X]$ aus?

c) Verallgemeinere diese Aussagen auf affine Transformationen $(T_{a,b}f)(X) = f(aX+b)$ mit $a, b \in K$, $a \neq 0$. Zeige, dass diese Transformationen eine Gruppe bilden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Der Quotientenkörper $K(X)$ von $K[X]$ besteht aus allen rationalen Funktionen $f(X) := \frac{p(X)}{q(X)}$ mit $p, q \in K[X]$, $q \neq 0$. Betrachte invertierbare 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K).$$

a) Beweise, dass die Transformation

$$(T_g\, f)(X) = f\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

einen Automorphismus von $K(X)$ definiert, welcher den Teilkörper $K \subset K(X)$ der konstanten Funktionen punktweise fest hält, also ein Element der Galoisgruppe $Aut_K(K(X))$ ist. Beachte: Auch hier muss $T_g\, f$ wieder sorgfältig definiert werden. Betrachte zunächst $T_g\, p$ für ein Polynom $p \in K[X]$.

b) Beweise die Formel

$$T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1\, g_2}$$

für alle $g_1, g_2 \in GL_2(K)$.

c) Bestimme die inverse Transformation T_g^{-1}.

d) Zeige, dass T_g den Unterring $K[X]$ genau dann (als Menge) invariant lässt, wenn g eine affine Transformation ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige: $n^5 + n^4 + 1$ ist nicht prim für $n > 1$.
Hinweis: Betrachte eine primitive dritte Einheitswurzel.