Übungen zur Algebra II

– Blatt 5 –

Abgabe: Dienstag, den 20.05.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K unendlich viele Elemente besitzt. Hinweis: Falls K nur endlich viele Elemente hat, kann man wie im Beweis von Euklid zur Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen ein Polynom $f \in K[X]$ konstruieren, welches keine Nullstelle in K besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung und K sei abzählbar. Beweise ausführlich, dass auch die algebraische Hülle $\overline{K}$ bzgl. E abzählbar ist. Wende dieses Argument auf die algebraischen Zahlen $\overline{\mathbb{Q}}$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Z}/n$ der Restklassenring mod n . Seine Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$ besteht aus den Restklassen $m + \mathbb{Z} \cdot n$ wobei $1 \leq m < n$ teilerfremd zu n ist. Die Euler'sche Funktion $\varphi(n)$ ist die Anzahl dieser Restklassen.

a) Zeige, dass für eine Primzahl p und $r \geq 1$ gilt:

$$\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}.$$

b) Sei $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ die Primfaktorzerlegung von n . Definiere einen Ring-Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/(p_1^{m_1}) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_k^{m_k})$$

auf das direkte Produkt der Ringe $\mathbb{Z}/(p_i^{m_i})$. Nachzuweisen ist die Wohldefiniiertheit, die Injektivität sowie die Surjektivität.

c) Welche Folgerung ergibt sich daraus für die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$?

d) Gebe eine explizite Formel für $\varphi(n)$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Möbius-Inversionsformel für die Kreisteilungspolynome lautet

$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

Dabei ist die Möbius-Funktion μ erklärt durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ (-1)^r, & \text{falls } n = p_1 \cdots p_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Danach ist $\Phi_n(X)$ also als Quotient zweier ganzzahliger Polynome, nämlich Produkte der Form $X^m - 1$, darstellbar. Wir schreiben die Primfaktorzerlegung von n als $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$.

- a) Verifiziere die Möbius-Umkehrformel direkt für den Fall $k = 2$.
- b) Beweise die Möbius-Umkehrformel durch Induktion nach k . Verwende dabei die Tatsache, dass

$$\Phi_{pm}(X) = \frac{\Phi_m(X^p)}{\Phi_m(X)} \quad \text{falls } p \nmid n \quad (1)$$

$$\Phi_{pm}(X) = \Phi_m(X^p) \quad \text{falls } p \mid n. \quad (2)$$