Übungen zur Algebra II

– Blatt 9 –

Abgabe: Dienstag, den 01.07.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Für einen Körper K sei $F := K(t_1, \dots, t_r)$ der Körper aller rationalen Funktionen in r Unbestimmten und $E := F^{\mathcal{S}_r} = K(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ der Fixkörper für die Permutationswirkung der symmetrischen Gruppe $G = \mathcal{S}_r$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimme ein primitives Element $\beta \in F$ mit $F = E(\beta)$. Hinweis: Finde β mit der Eigenschaft $\pi(\beta) \neq \beta$ für alle nicht-trivialen Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ und argumentiere dann mit dem Hauptsatz der Galoistheorie.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige, dass die Körpererweiterung

$$E \subset E(t_r)$$

den Grad r hat. Bestimme eine explizite Basis von r Elementen. Hinweis: Benutze die Formel

$$\prod_{j=1}^r (X - t_j) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \sigma_i(t_1, \dots, t_r) X^{r-i}$$

und setze t_r ein. Bestimme die Galoisgruppe von F über $E(t_r)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige allgemeiner, dass für $1 \leq k < r$ die Körpererweiterung

$$E(t_{k+1}, \dots, t_r) \subset E(t_k, t_{k+1}, \dots, t_r)$$

den Grad k hat. Bestimme eine explizite Basis von k Elementen. Hinweis: Benutze die Formel

$$\prod_{j=1}^k (X - t_j) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_i(t_1, \dots, t_k) X^{k-i}$$

und setze t_k ein. Beachte, dass die Koeffizienten in $E(t_{k+1}, \dots, t_r)$ liegen müssen. Bestimme die Galoisgruppe von F über $E(t_k, \dots, t_r)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige mit Hilfe der vorigen Aufgaben, dass F über E eine Basis der Form

$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_r^{m_r}$$

mit ganzen Zahlen $0 \leq m_i \leq i - 1$ besitzt. Wie viele Basiselemente erhält man auf diese Weise? Folgere, dass $\mathcal{S}_n$ tatsächlich die volle Galoisgruppe von F über E ist.