Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M. Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2013

Übungen zur Analysis III

– Blatt 10 –

Abgabe: Montag, den 15.07.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\omega = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ die Volumenform des $\mathbf{R}^n$.

a) Für die lineare Transformation $y = g \cdot x$ mit $g = (g_i^j) \in GL_n(\mathbf{R})$ gilt die pullback Formel

$$g^*\omega = (\det g)\omega$$

nach Definition von pullbacks. Beweise diese Formel direkt durch Berechnung von $dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$, wobei (Summations-Konvention)

$$y_i = g_i^j x_j$$

Hinweis: Benutze unabhängige Indizes $i_1, j_1, ..., i_n, j_n$ und reduziere die entstehende Summe sukzessive auf die Determinanten-Formel.

b) Beweise als Folgerung, dass ω invariant unter speziellen orthogonalen Transformationen $g \in SO(n)$ ist. Was gilt für allgemeine orthogonale Transformationen $g \in O(n)$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Im $\mathbf{R}^{n+1}$ mit Koordinaten $x_0, ..., x_n$ sei

$$\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

die n-Sphäre. Die n-Form

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \, dx_0 \wedge .. \wedge \hat{dx_i} \wedge .. \wedge dx_n$$

auf $\mathbf{S}^n$ heisst Volumenform. Sei $g = (g_i^j) \in SO(n+1)$ und $y_i = g_i^j x_j$ für $0 \leq i, j \leq n$. Beweise wie in der obigen Aufgabe, dass Ω invariant unter $y = g \cdot x$, ist, d.h.

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i y_i \, dy_0 \wedge .. \wedge \hat{dy_i} \wedge .. \wedge dy_n$$

in den neuen Koordinaten. (Man kann zeigen, dass es bis auf konstante Vielfache nur eine $SO(n+1)$-invariante n-Form auf $\mathbf{S}^n$ gibt; diese muss daher die Volumenform sein.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $e := (1, 0, ..., 0) \in \mathbf{S}^n$. Die Abbildung $\pi : \mathbf{S}^n \setminus \{e\} \to \mathbf{R}^n$, gegeben durch

$$\pi(x_0, ..., x_n) := (\frac{x_1}{1 - x_0}, ..., \frac{x_n}{1 - x_0})$$

heißt stereographische Projektion. Es gelte also

$$t_i = \pi_i(x) = \frac{x_i}{1 - x_0}$$

für $1 \leq i \leq n$.

a) Beweise, dass π bijektiv ist.

b) Finde die Umkehrabbildung $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{S}^n$ in den Koordinaten

$$(x_0, ..., x_n) = \phi(t_1, ..., t_n),\ x_i = \phi_i(t)$$

Beachte: Auch $x_0 = \phi_0(t)$ muss durch $t_1, ..., t_n$ ausgedrückt werden. Benutze dazu die Sphärengleichung.

c) Zeige für den pullback $\phi^*\Omega$ der Volumenform Ω

$$\phi^*\Omega = const \cdot \frac{dt_1 \wedge ... \wedge dt_n}{(1 + t \cdot t)^\alpha}$$

für ein geeignetes α. Als Teilschritte:

i) Schreibe $\phi_1, ..., \phi_n$ als Vielfache von $1 - \phi_0$. Dann können $d\phi_1, ..., d\phi_n$ mit Hilfe von $d\phi_0$ ausgedrückt werden.

ii) Für jede 1-Form ϑ gilt $\vartheta \wedge \vartheta = 0$. Wendet man dies auf $\vartheta = d\phi_0$ an, so vereinfachen sich die n-Formen $d\phi_1 \wedge ... \wedge d\phi_n$ und $d\phi_0 \wedge d\phi_1 \wedge ... \wedge \hat{d\phi_i} \wedge ... \wedge d\phi_n$ für $1 \leq i \leq n$.

iii) Berechne abschließend

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \phi_i \, d\phi_0 \wedge ... \wedge \hat{d\phi_i} \wedge ... \wedge d\phi_n = \phi_0 \, d\phi_1 \wedge ... \wedge d\phi_n$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \phi_i \, d\phi_0 \wedge d\phi_1 \wedge ... \wedge \hat{d\phi_i} \wedge ... \wedge d\phi_n$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Auf der offenen Menge $M := \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiere eine Äquivalenzrelation $x \sim y$ genau dann wenn $y = \lambda x$ für ein $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$ gilt. Die Äquivalenzklasse

$$[x] = \mathbf{R} \cdot x \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

ist die von $x \neq 0$ erzeugte Gerade. Wir schreiben genauer in homogenen Koordinaten

$$[x] = [x_0, .., x_n].$$

Der Quotient

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) := M/\sim = \{[x] : x \neq 0\}$$

heißt der reell-projektive Raum.

a) Zeige, dass für jedes $0 \leq i \leq n$ die Abbildung $\phi_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{P}^n$, definiert durch

$$\phi_i(u_0, ..., \hat{u_i}, ..., u_n) := [u_0, ..., 1, ..., u_n]$$

injektiv ist. Beschreibe die Bildmenge $U_i = \phi_i(\mathbf{R}^n)$.

b) Zeige

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i$$

c) Zeige, dass für $i \neq j$ die Übergangs-Abbildung $\phi := \phi_j^{-1} \circ \phi_i$ die folgende Form hat

$$\phi(u_0, ..., \hat{u_i}, ..., u_j, ..., u_n) = (\frac{u_0}{u_j}, ..., \frac{1}{u_j}, ..., \hat{v_j}, ..., \frac{u_n}{u_j})$$

d.h. für $v = \phi(u) = (v_0, ..., v_i, ..., \hat{v_j}, ..., v_n)$ gilt $v_k = \frac{u_k}{u_j}$ für $k \neq i, j$ und $v_i = \frac{1}{u_j}$

d) Betrachte die n-Form

$$\omega_i = \frac{du_0 \wedge ... \wedge \hat{du_i} \wedge ... \wedge du_j \wedge ... \wedge du_n}{(1 + u \cdot u)^\alpha}$$

Beweise, dass für geeignetes α gilt

$$\phi^* \omega_j = \pm \omega_i$$

wobei das Vorzeichen nicht immer $+1$ ist. Hinweis: Ähnlich wie in der vorigen Aufgabe kommt die 1-Form du_j bei der Berechnung von

$$dv_0 \wedge ... \wedge dv_i \wedge ... \wedge \hat{dv_j} \wedge ... \wedge dv_n$$

in allen Faktoren vor, mit entsprechender Vereinfachung. Diese Aufgabe zeigt, dass der reell-projektive Raum, im Gegensatz zum komplex-projektiven Raum, nicht orientierbar ist, d.h. es existiert keine Volumen n-Form auf $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.