Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2013

Übungen zur Analysis III

– Blatt 2–

Abgabe: Montag, den 06.05.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweise mit Hilfe des Existenz-Lemmas, dass in der Defnition der Integrierbarkeit über einen Quader P das Integral $\int\limits_P f$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweise mit Hilfe der Definition der Integrierbarkeit: Sei $f : P \to \mathbf{R}$ integrierbar und $c \in \mathbf{R}$. Dann ist auch das Vielfache $c \cdot f$ integrierbar, und es gilt

$$\int\limits_P c \cdot f = c \cdot \int\limits_P f$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei

$$P = \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha$$

eine Partition in abgeschlossene Teilquader P_α, welche aber ausgeartet, d.h. mit leerem Inneren, sein können. Beweise: Es gilt auch

$$P = \bigcup_{\alpha \in B} P_\alpha$$

wobei

$$B = \{\alpha \in A : P_\alpha \text{ nicht-ausgeartet}\},$$

d.h., die ausgearteten Quader können weggelassen werden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine bijektive Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

a) T bildet jeden Quader P auf einen Quader $T(P)$ ab.

b) T bildet Würfel, d.h. Quader mit gleichen Seitenlängen, auf Würfel ab, genauer gilt

$$T(B_r(a)) = B_{\lambda r}(T(a))$$

für die abgeschlossenen Kugeln bzgl. der Maximum-Norm.

c) Für den Inhalt gilt

$$|T(P)| = \lambda^n |P|$$

Dabei ist λ eine feste Konstante > 0, die nur von T abhängt.

Beweise: Ist $f : P \to \mathbf{R}$ integrierbar, dann ist auch $f \circ T^{-1} : T(P) \to \mathbf{R}$ integrierbar, und es gilt

$$\int\limits_{T(P)} f \circ T^{-1} = \lambda^n \int\limits_{P} f$$

Zeige, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind für die folgenden Transformationen

a) Translationen: $Tx = x + a$ für festes $a \in \mathbf{R}^n$

b) Permutationen: $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$

c) Streckungen: $Tx = \lambda x$ für festes $\lambda > 0$