

Übungen zur Analysis III

– Blatt 4 –

Abgabe: Montag, den 27.05.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei P ein Quader. Eine Teilmenge $M \subset P$ heisst *messbar*, falls die charakteristische Funktion $\chi_M : P \rightarrow \mathbf{R}$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$|M| := \int_P \chi_M$$

das *Maß* von M . Beweise mit dem Satz von der monotonen Konvergenz die sogenannte σ -Additivität: Für eine Folge disjunkter messbarer Mengen $M_n \subset P$ ist auch die Vereinigung $\bigcup_n M_n$ messbar und es gilt

$$\left| \bigcup_n M_n \right| = \sum_n |M_n|$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine messbare Menge $M \subset P$ mit Maß $|M| = 0$ heißt *Nullmenge*. Beweise: Jede Teilmenge $N \subset M$ einer Nullmenge M ist eine Nullmenge (Formuliere die Nullmengen-Eigenschaft direkt mittels Quader-Partitionen). Diese Eigenschaft ist nicht trivial, sie gilt z.B. nicht für das Lebesgue-Maß, sondern nur für dessen Vervollständigung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

- a) Sei $T \in GL_n(\mathbf{R})$ eine Diagonalmatrix. Die zugehörige lineare Transformation $x \rightarrow Tx$ führt Quader in Quader über, erhält im allg. aber keine Würfel. Beweise stattdessen mit dem Satz von Fubini: Ist für einen Quader P die Funktion $f : T(P) \rightarrow \mathbf{R}$ stetig (und damit integrierbar), so ist auch $f \circ T : P \rightarrow \mathbf{R}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{T(P)} f = |\det T| \int_P f \circ T$$

- b) Beweise die Aussage in a) falls T eine Scherung ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Der *Träger* einer Funktion $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ist definiert als

$$\text{Trg}(f) = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

Sei $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Beweise, dass für jede invertierbare lineare Transformation $x \rightarrow Tx$ gilt: $f \circ T$ ist integrierbar mit

$$\int_{\mathbf{R}^n} f = |\det T| \int_{\mathbf{R}^n} f \circ T$$

Zeige zunächst, dass die linearen Transformationen mit dieser Eigenschaft eine Gruppe bilden. Danach kann mit früheren Aufgaben argumentiert werden. Die Beschränkung auf kompakten Träger ist nicht notwendig. Sie wird nur gemacht, weil das Integral bisher nur für Quader eingeführt ist. Wie geht die Beziehung von kompaktem Träger zu geeigneten Quadern ein?