

## Übungen zur Analysis III

– Blatt 5 –

Abgabe: Montag, den 10.06.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$$

mit  $b_n \in \{0, 1, 2\}$  heisst triadische Potenzreihe.

- a) Zeige, dass jede triadische Potenzreihe konvergiert mit Reihenwert in  $[0, 1]$
- b) Sei nun  $a_i \in \{0, 1\}$  für alle  $i \geq 0$ . Zeige, dass die endlichen Summen

$$2 \sum_{n=1}^k \frac{a_{k-n}}{3^n} = \frac{2}{3^k} \sum_{i=0}^{k-1} a_i 3^i$$

genau die linken Endpunkte der Intervalle in der  $k$ -ten Iterationsmenge  $M_k$  der Cantor-Menge sind ( $k \geq 0$ , mit 0 als der leeren Summe). Warum sind dies genau  $2^k$  Punkte?

- c) Zeige (mittels Kompaktheit), dass

$$C := \bigcap_{k \geq 0} M_k = \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 1\} \right\}$$

- d) Sei  $2^{\mathbb{N}}$  die Menge aller Folgen  $a_n \in \{0, 1\}$ . Dann ergibt sich also eine Surjektion von  $2^{\mathbb{N}}$  auf die Cantor-Menge. Zeige (als \*-Aufgabe), dass dies auch eine Injektion ist.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Nach der Vorlesung ist die Cantor-Menge  $M \subset \mathbf{R}$  eine (kompakte) Nullmenge. Finde zu  $\epsilon > 0$  eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbf{R}$  mit  $M \subset U$  und  $\mu(U) \leq \epsilon$

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $M \subset \mathbf{R}^n$  eine Menge mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem  $\epsilon > 0$  existieren eine kompakte Menge  $K \subset M$  und eine offene Menge  $M \subset U$  sodass

$$S - \epsilon \leq \mu(K) \leq S \leq \mu(U) \leq S + \epsilon$$

Dabei sei  $S \geq 0$  eine feste Zahl. Beweise:  $M$  ist messbar mit  $\mu(M) = S$ .

Hinweis: Zeige für geeignete Folgen  $K_n \subset M \subset U_n$ , dass

$$N := \bigcap_n U_n \setminus \bigcup_n K_n$$

eine Nullmenge ist.

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

- a) Sei  $H \subset \mathbf{R}^n$  ein linearer Unterraum mit  $\dim H < n$ . Beweise:  $H$  ist eine Nullmenge.  
Hinweis: Ist  $H$  achsen-parallel, konstruiere direkt geeignete Würfelüberdeckungen.  
Im allgemeinen kann  $H$  durch eine Transformation in  $GL_n(\mathbf{R})$  achsen-parallel gemacht werden.
- b) Sei  $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  eine lineare Abbildung mit  $\det T = 0$ . Beweise: Die Bildmenge  $\operatorname{Im}(T) \subset \mathbf{R}^n$  ist eine Nullmenge.