Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2013

Übungen zur Analysis III

– Blatt 6 –

Abgabe: Montag, den 17.06.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $M \subset U$ eine Nullmenge. Sei $f : U \to \mathbf{R}$ lokal integrierbar, z.B. stetig. Beweise

$$\int\limits_M f = 0$$

Hinweis: Sei zunächst f beschränkt. Betrachte dann geeignete Würfelüberdeckungen von M. Im allgemeinen benutze die Funktionen

$$f_n(x) := \min(f(x), n)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Definiere Polarkoordinaten

$$(x, y) = \Phi(r, t) := (r \cos t, r \sin t)$$

mit $r > 0, t \in \mathbf{R}$.

a) Finde (maximale) offene Mengen $U, V \subset \mathbf{R}^2$ sodass

$$\Phi : U \to V$$

ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist. (Beweis!)

b) Sei f eine stetige Funktion auf der abg. Kreisscheibe

$$B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Schreibe das Integral $\int\limits_B f$ mittels Polarkoordinaten (Trafo-Formel). Benutze die vorige Aufgabe für die Punkte, wo Φ kein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechne die Fläche der Ellipse

$$E := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

auf zweierlei Weise:

a) Durch Anwendung der Trafo-Formel mittels Polarkoordinaten

b) Durch Anwendung des Cavalieri-Prinzips (wird in der Vorlesung angegeben)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $f : U \to \mathbf{R}$ eine stetig diffbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^n$. Beweise, dass der Graph

$$G := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

eine Nullmenge ist. Hinweis: Schreibe $G = \Phi(N)$ als Bild einer Nullmenge N für eine geeignete Abbildung Φ.

b) Sei $V \subset \mathbf{R}^m$ eine offene Menge und $g : V \to \mathbf{R}$ eine stetig diffbare Funktion mit Gradient $dg(y) \neq 0$ für alle $y \in V$. Beweise, dass die Fasern

$$N_c := \{y \in V : g(y) = c\}$$

für $c \in \mathbf{R}$ jeweils Nullmengen sind. Hinweis: Nach dem Satz über implizite Funktionen kann lokal der Teil a) benutzt werden.