Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M. Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2013

Übungen zur Analysis III

– Blatt 9 –

Abgabe: Montag, den 08.07.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos(t), y = r \cdot \sin(t)$$

auf $\mathbf{R}^2$. Sei

$$\omega = f(x)dy - g(y)dx$$

eine 1-Form.

a) Schreibe ω und die äußere Ableitung $d\omega$ mittels Polarkoordinaten, d.h. mit den partiellen Ableitungen nach r und t.

b) Für "Polargebiete" $U \subset \mathbf{R}^2$, definiert durch die Bedingung $0 < c \leq r \leq C$ und $\alpha \leq t \leq \beta$, beschreibe die Parametrisierung der Randkomponenten und ihre induzierte Orientierung.

c) Beweise den Gauss-Integralsatz für Polargebiete durch Zurückführung auf den Hauptsatz der Diff- und Int-Rechnung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei

$$B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

die Einheitskreisscheibe. Die runde Pyramide $K \subset \mathbf{R}^3$, mit Koordinaten x, y, z, sei definiert als konvexe Hülle von $B \times 0 \subset \mathbf{R}^3$ mit dem Punkt $o = (0, 0, 1)$.

a) Beweise, dass K ein 3-dimensionales Stück, im Sinne der Vorlesung (am Montag) ist. Was sind die regulären Punkte K^o von K? Beschreibe die Parametrisierung von K^o und zeige, dass $K \setminus K^o$ eine 3-Nullmenge ist.

b) Schreibe das Integral $\int\limits_K \Omega$ einer 3-Form $\Omega = f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$ mittels der Parametrisierung von K^o.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachte den Rand ∂K der runden Pyramide K der vorigen Aufgabe.

a) Beweise, dass ∂K ein 2-dimensionales Stück, im Sinne der Vorlesung (am Montag) ist. Was sind die regulären Punkte $\partial^o K$ von ∂K? Beschreibe die Parametrisierung der einzelnen Komponenten von $\partial^o K$ und zeige, dass $\partial K \setminus \partial^o K$ eine 2-Nullmenge ist.

b) Schreibe das Integral $\int_{\partial K} \omega$ einer 2-Form

$$\omega = f(x,y,z)dx \wedge dy + g(x,y,z)dy \wedge dz + h(x,y,z)dz \wedge dx$$

mittels der Parametrisierung der Komponenten von $\partial^o K$.

c) Verifiziere die Gauss-Formel in diesem Fall durch direkte Anwendung des Hauptsatzes.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $n \geq 2$ sei $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbf{R}^n$ und

$$K := \{(t,x) \in \mathbf{R}^{n+1} : t^2 - x \cdot x \geq 0\}$$

der $(n+1)$-dimensionale Vorwärts-Lichtkegel.

a) Zeichne K im Falle $n = 2$

b) Zeige im allgemeinen, dass K ein konvexer Kegel ist, d.h. abg. unter Addition und Multiplikation mit positiven Skalaren

c) Was ist das Innnere $U := K^o$ von K?

d) Bestimme alle Facetten von K. Betrachte zunächst $n = 2$. Ist die Zahl der Facetten endlich?

e) Ein "Stratum" von K ist die Vereinigung aller "offenen" Facetten der gleichen Dimension, einschliesslich der Extrempunkte sowie des vollen Inneren. (K soll die *disjunkte* Vereinigung der verschiedenen Strata sein.) Wie viele Strata besitzt K? Beschreibe die Strata explizit und berechne deren Dimension.