# Campus Marburg 2013

## Selbstähnliche Pflasterungen

Fachbereich Mathematik und Informatik, Arbeitsgruppe Numerik

### Was sind eigentlich Pflasterungen?

- Pflasterungen (auch Parkettierungen oder Kachelungen) sind Überdeckungen der gesamten unendlichen Ebene mit einem Typ von Baustein (oder wenigen Typen). Dabei darf es keine Lücken oder Überschneidungen geben. Den Baustein nennt man *selbstähnlich*, wenn Ausschnitte davon wie verkleinerte Kopien des Gesamtbausteins aussehen.
- Unsere Pflasterungen entstehen als Nebenprodukt bei speziellen Verfahren zur Darstellung zweidimensionaler Signale (z.B. Bilder), bei denen die Signalfunktion zerlegt wird in Grob- und Detailinformation.

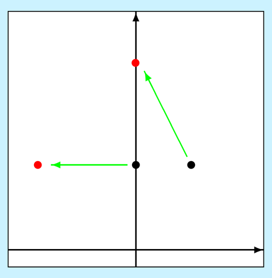
### Herzstück der Konstruktion einer Kachel

- Die Konstruktion einer Kachel beruht auf einer **Matrix**, die geometrisch einer Streckung (+ Drehung, ...) der Ebene entspricht, wobei die Fläche geometrischer Objekte um einen ganzzahligen Faktor $2, 3, 4, \ldots$ vergrößert wird.
- Eine solche Abbildung der Ebene wird durch 4 ganze Zahlen beschrieben, die man in einer $2 \times 2$-Matrix $M$ anordnet. Wenn man einen Punkt $(x, y)^\top$ der Ebene in cartesischen Koordinaten ausdrückt, kann man die Abbildung einfach ausrechnen nach der Vorschrift

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Für die Konstruktion einer Kachel muss, unter anderem, die Determinante der Matrix einen Betrag größer als eins besitzen, d.h. $m := |\det(M)| = |ad - bc| \geq 2$.

Der "Zwillingsdrachen", siehe Bild 1, gehört zur Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, die einer $45^o$ Drehung nach links und Streckung um der Faktor $\sqrt{2}$ (Verdoppelung der Fläche) entspricht. Die Graphik zeigt die Punkte $(1, 1)^\top$ und $(0, 1)^\top$ in schwarz und ihre Bilder unter der Vorschrift in rot.

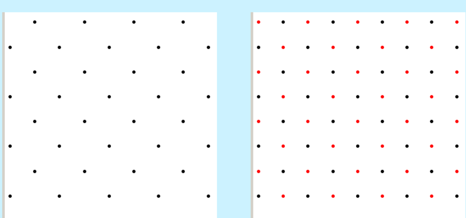


### Beziehungen zur Gittertheorie

- Man betrachtet das Gitter $G = \mathbb{Z}^2$ aus allen ganzzahligen Punkten der Ebene. Wenn man alle Punkte des Gitters mit der Matrix $M$ abbildet, sind die Bildpunkte zwar wieder ganzzahlig, das gestreckte Gitter $M \cdot G$ hat aber viele Lücken. Man bekommt jedoch das volle Gitter $G$, wenn man genau $m$ verschobene gestreckte Gitter übereinander legt. Nennt man diese Verschiebungen $d_1, d_2, \ldots, d_m$, so gilt dann

$$G = (d_1 + M \cdot G) \cup (d_2 + M \cdot G) \cup \ldots \cup (d_m + M \cdot G).$$

Beim Zwillingsdrachen kann man $d_1 = (0, 0)^\top$ und $d_2 = (0, 1)^\top$ wählen. In den Bildern ist das gestreckte Gitter in schwarz gezeichnet. Rechts wird es, in rot, mit dem um eins nach oben verschobenen Gitter übelagert, so dass man das volle Gitter erhält.

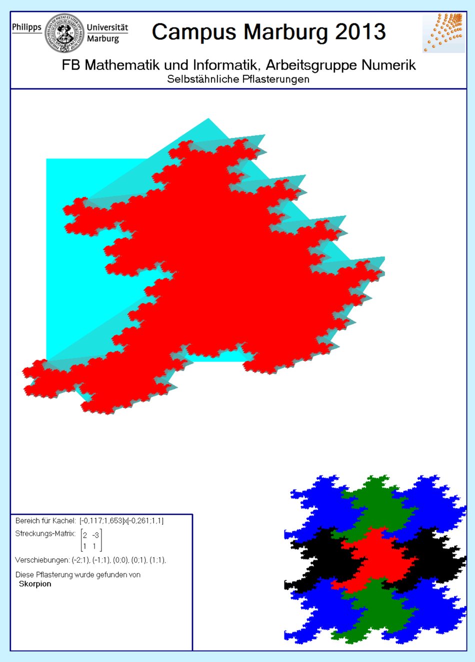


### Zur Erstellung einer Pflasterung

- Die Erstellung einer Pflasterung ist ein unendlicher Prozeß, der aber schnell konvergiert. Denn dabei wird nicht die Streckung $M$, sondern ihre *Umkehrabbildung* $M^{-1}$ verwendet, die die Fläche aller Objekte um den Faktor $1/m$ verkleinert. Man beginnt mit dem Einheitsquadrat $Q$ in der Ebene und legt die $m$ verschobenen Kopien des verkleinerten Quadrats $M^{-1}Q$ übereinander mit den Verschiebungen $d_1, \ldots, d_m$. Dann wird dieser Prozess wiederholt (iteriert), wobei sich die Anzahl der Kopien jeweils um den Faktor $m$ vergrößert.
- Man kann beweisen, dass dieser Prozess gegen eine Menge $P$ konvergiert, die selbstähnliche Kachel. Wenn die Fläche der Kachel eins ist, bekommt man tatsächlich eine Pflasterung der ganzen Ebene, indem man $P$ in beiden Koordinatenrichtungen um ganzzahlige Strecken verschiebt.

### Das Computerprogramm *"Drachenpflaster"*

- Das Programm *"Drachenpflaster"* malt das Ergebnis einer jeden Wiederholung in verschiedenen Farben übereinander, beginnend mit dem Einheitsquadrat in hellgrün bis zur letzten Generation in rot. Im Computer sind natürlich nur eine begrenzte Anzahl von Wiederholungen möglich $(8, \ldots, 24)$.
- Das Ergebnis zeigt eine Kachel in rot (zusammen mit den Vorgänger-Generationen) und unten eine Pflasterung mit 9 Kacheln, sowie die zugehörigen mathematischen Daten.
- Sie finden das Programm auf unserer Homepage.

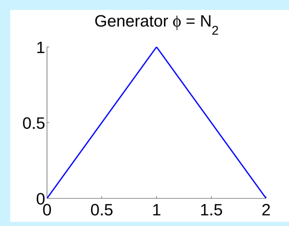


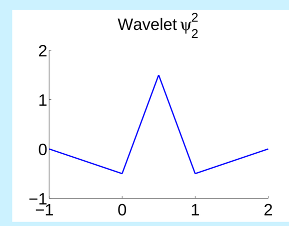
### Wozu braucht man solche Pflasterungen?

- In der Mathematik werden selbstähnliche Pflasterungen zur Konstruktion von *Wavelet-Systemen* verwendet. Dies sind Funktionssysteme $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d}$, die durch Stauchung und Verschiebung einer einzigen Funktion $\psi$ gewonnen werden: $\psi_{j,k}(x) := m^{j/2}\psi(M^j x - k)$. Grundlage der Konstruktion ist ein *Generator* $\phi$, der einer Selbstähnlnlichkeitsbeziehung genügt: $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi(Mx - k)$. Mit

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1 & x \in P, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{wobei } P \text{ selbstähnliche Kachel ist,}$$

ist $\phi_N(x) = \underbrace{\chi_P * \cdots * \chi_P}_{N-\text{mal}}$ ein glatter Generator.





- Auch in der Kristallographie finden solche Pflasterungen ihre Anwendung.

### Einige schöne Pflasterungen

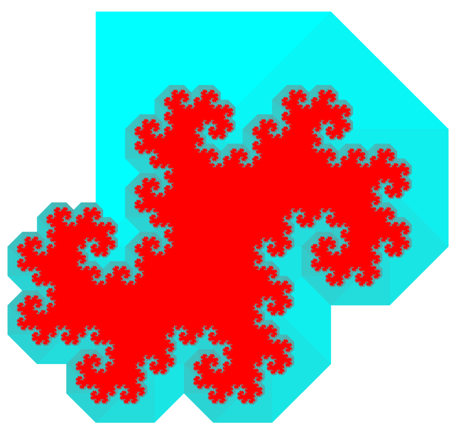


Bild 1: Zwillingsdrachen

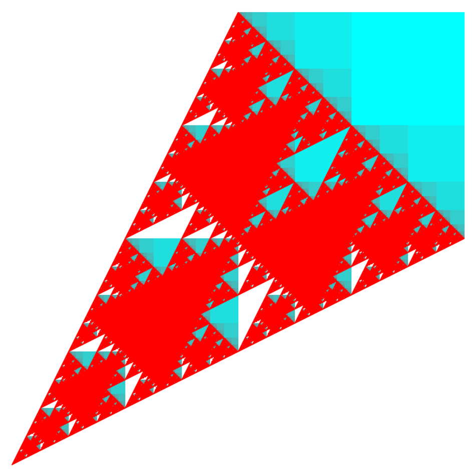


Bild 2: löchriges Dreieck

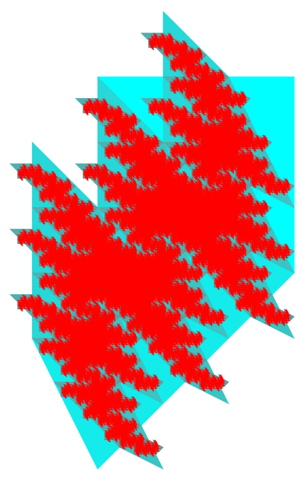


Bild 3: Fuzzy

### Zum Weiterlesen


[1] DAHLKE, S. ; DAHMEN, W. ; LATOUR, V.: Smooth refinable functions and wavelets obtained by convolution products. In: *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2 (1995), S. 68–84

[2] DAHLKE, S. ; LATOUR, V.: A note on the linear independence of characteristic functions of self-similar sets. In: *Arch. Math.* 66 (1996), S. 80–88

[3] DAHLKE, S. ; LATOUR, V. ; NEEB, M.: Generalized cardinal B-splines: stability linear independence and appr. scaling matrices. In: *Constr. Approx.* 13 (1997), S. 29–56

[4] GRÖCHENIG, K. ; HAAS, A.: Self-similar lattice tilings. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 1 (1994), S. 131–170

[5] GRÖCHENIG, K. ; MADYCH, W.R.: Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of $R^n$. In: *IEEE Trans. Inf. Theory* 38 (1992), S. 556–568

[6] LAGARIAS, J.C. ; WANG, Y.: Integral self-affine tiles in $R^n$. I: Standard and non-standard digit sets. In: *J. Lond. Math. Soc., II.* 54 (1996), S. 161–179

[7] STRICHARTZ, R.S.: Wavelets and self-affine tilings. In: *Constr. Approx.* 9 (1993), S. 327–346


## Forschungsgebiete der AG Numerik

- Adaptive Wavelet Methoden für elliptische, parabolische und stochastische PDG
- Adaptive Wavelet Methoden für inverse Probleme
- Regularitätstheorie für partielle Differentialgleichungen und Integralgleichungen
- Numerische harmonische Analysis, Coorbit- und Frame-Theorie
- Shearlet Theorie
- Peer Zwei-Schritt Methoden für Anfangswertprobleme
- Mathematische Modellierung in der Biologie

## Kontakt


**Prof. Dr. Bernhard Schmitt:** `schmitt@mathematik.uni-marburg.de`

**Prof. Dr. Stephan Dahlke:** `dahlke@mathematik.uni-marburg.de`


`http://www.mathematik.uni-marburg.de/~numerik/`