

SHEARLETS:

EIN NEUES PRINZIP DER SIGNALANALYSE

PROF. DR. S. DAHLKE, PROF. DR. A. JAVAHERIAN, PROF. DR. CH. NIMSKY,
DR. M. BOPP, DR. B. CARL, H. KARBALAALI, P. KEDING, A. KERL, L. SAWATZKI

SHEARLETS

Unter Shearlets versteht man neuartige Darstellungssysteme zur Signal- und Bildverarbeitung. Diese neuen Systeme sind insbesondere zur Detektion von Richtungsinformationen in Bildern geeignet und erlauben optimale Approximationsraten. Das folgende Bild illustriert schematisch die Funktionsweise von Shearlets.

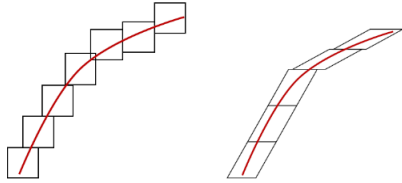


BILD 1: Funktionsweise herkömmlicher Systeme (links) gegenüber den neuartigen Shearlets (rechts)

In vielen praktischen Anwendungen, etwa in der Geophysik zur Analyse seismischer Daten, sind Shearlets von unserer Arbeitsgruppe bereits erfolgreich angewendet worden.

SHEARLETS UND SEISMISCHE DATEN

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Möglichkeiten, welche Shearlets bieten. Gegeben ist das folgende Bild aus der Geophysik.

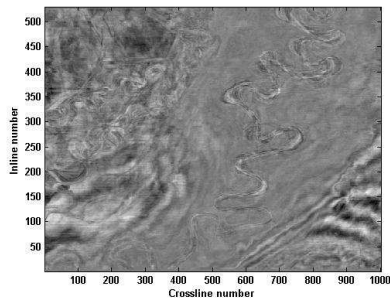


BILD 2: Ein Ausschnitt aus gegebenen seismischen Daten aus dem südlichen Kaspischen Meer

Mit Hilfe von Shearlets sollen Richtungsinformationen aus diesem Bild gewonnen werden, insbesondere bezüglich der Mäandrierung in der Mitte des Bildes.

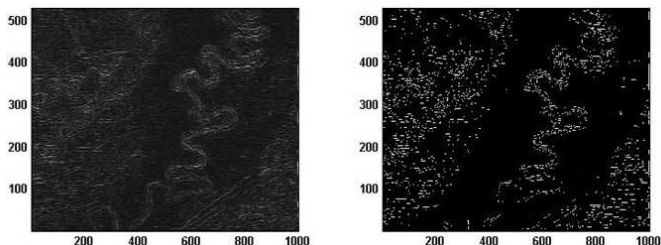


BILD 3: Anwendung von Shearlets auf Bild 2

Das linke Bild zeigt eine Filterung von Bild 2 mit Hilfe von Shearlets, wobei im rechten Bild die reinen Richtungsinformationen abgebildet sind. Hier ist gut zu erkennen, dass die mittlere Struktur deutlich herausgearbeitet wurde. Der Shearlet-Ansatz konnte inzwischen erfolgreich auf den dreidimensionalen Fall erweitert und auf seismische Daten angewendet werden.

SHEARLETS UND MEDIZINISCHE DATEN

Im Zuge einer geplanten Kooperation mit der Klinik für Neurochirurgie in Marburg wollen wir Shearlets für spezielle Probleme der medizinischen Bildverarbeitung, insbesondere zur Bildregistrierung, einsetzen.

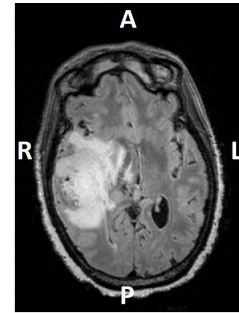


BILD 4: Querschnitt eines Kopfes mit Gehirntumor auf der rechten Seite

Graustufenbilder wie dieses lassen sich mit Shearlets sehr gut analysieren, um, ähnlich wie bei seismischen Daten, spezielle Strukturen zu extrahieren.

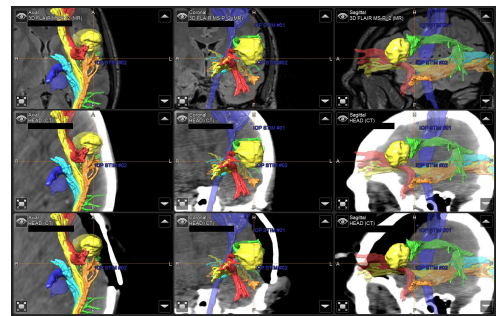


BILD 5: Farblich hervorgehobene 3D-Strukturen im Gehirn aus einem präoperativen MRT (oben), einem CT vor der Operation (mitte) und einem CT nach der Operation (unten)

Um einzelne Regionen im menschlichen Gehirn zu registrieren eignen sich 3D-Shearlets hervorragend. Insbesondere werden bereits Algorithmen verwendet, die in Echtzeit Daten analysieren können. Dies könnte Chirurgen helfen, nicht sichtbare und sich möglicherweise verändernde Strukturen während der Operation zu erkennen.

MATHEMATISCHER HINTERGRUND

Zu einem zulässigen Mother-Shearlet ψ ist die *Shearlet-Transformation* einer Funktion f definiert als das L_2 -Innenprodukt von f mit $\psi_{(a,s,t)}$:

$$SH_{\psi}f(a, s, t) = \langle f, \psi_{(a,s,t)} \rangle = \langle f, \pi(a, s, t)\psi \rangle = |\det A_a|^{-\frac{1}{2}} \langle f, \psi(A_a^{-1}S_s^{-1}(\cdot - t)) \rangle,$$

wobei $\psi_{(a,s,t)}$ durch parabolische Dilatation, Scherung und Translation aus dem Mother-Shearlet hervorgeht. Dabei ist

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0^T \\ 0 & \operatorname{sgn}(a)|a|^{\frac{1}{2}}I_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad \text{und} \quad S_s = \begin{pmatrix} 1 & s^T \\ 0 & I_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $s \in \mathbb{R}^{d-1}$. Durch das asymptotische Verhalten der Shearlet-Transformation für $a \rightarrow 0$ lassen sich damit Kanten detektieren.