Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke
Manuel Werner

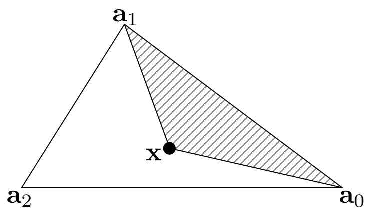
WS 2007/2008

2. Übungsblatt zur Vorlesung Computer Aided Geometric Design

Abgabe: Donnerstag, 08.11.2007, 14.00 Uhr, Raum D 6411, Lahnberge

Aufgabe 2: Baryzentrische Koordinaten

Es seien $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ affin unabhängige Punkte in $\mathbb{E}^n$. Es bezeichne $\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])$ das Volumen des durch die drei Punkte aufgespannten Zwei-Simplex.



Man beweise, dass für jeden Punkt $\mathbf{x}$, der in der konvexen Hülle von $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ liegt, eine eindeutige Darstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1$$

existiert, so dass

$$\lambda_0 = \frac{\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}])}{\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])}, \lambda_1 = \frac{\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}])}{\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])} \text{ und } \lambda_2 = \frac{\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{x}])}{\mathrm{vol}_2([\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Parametrisierung nach der Bogenlänge

Sei $\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbb{E}^3$ eine reguläre parametrische Kurve. Weiter sei $s : [a, b] \to [0, \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(\theta)\|_2 \mathrm{d}\theta]$, $s := s(u) = \int_a^u \|\dot{\mathbf{x}}(\theta)\|_2 d\theta$ die Parametrisierung nach der Bogenlänge.
Zeige

a) s ist regulär,

b) $L := \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(\theta)\|_2 \mathrm{d}\theta$ ist unabhängig von der Parametrisierung,

c) $\|\mathbf{x}'(s)\|_2 = 1$, wobei $\mathbf{x}'(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{x}(s)$ die Ableitung nach dem Bogenlängenparameter bezeichnet.

(3 Punkte)

Aufgabe 4: Implementierung der Bézier-Bernstein-Polynome

a) Implementieren Sie eine Funktion `bernstein_basis_function(n, x)`, welche die Bernstein-Basis-Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$,

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n$$

an den im Zeilenvektor `x` übergebenen Stellen auswertet. (3 Punkte)

b) Schreiben Sie eine Funktion `plot_bernstein_basis(n)`, welche alle Bernstein-Basis-Polynome B_j^n vom Grad n, $j = 0, \dots, n$, zusammen in ein Koordinatensystem zeichnet. (2 Punkte)

c) Entwickeln Sie eine Funktion `bernstein_polynom(n, c, x)`, die das Bézier-Bernstein-Polynom

$$B_n := \sum_{j=0}^{n} c_j B_j^n$$

vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ mit den Koeffizienten $(c_j)_{j=0}^n$ an den im Zeilenvektor `x` übergebenen Stellen auswertet. Testen Sie die Funktion mit dem Vektor `c` $= (1, \dots, 1)$. (2 Punkte)

Hinweise:

- Verwenden Sie wenn möglich keine expliziten Schleifen.
- Überprüfen Sie Ihre Eingabeargumente, geben Sie falls nötig Fehlermeldungen aus.
- Kommentieren Sie Ihren Quelltext ausführlich.
- Ihre fertiggestellten Programme senden Sie bitte per E-Mail an `werner@mathematik.uni-marburg.de`.