Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke
Manuel Werner

WS 2007/2008

3. Übungsblatt zur Vorlesung Computer Aided Geometric Design

Abgabe: Donnerstag, 29.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 5: Algorithmus von de Casteljau

Es seien $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in [0,1]$ beliebig gewählt.

a) Geben Sie das Schema des Algorithmus von de Casteljau zur Berechnung des Funktionswertes $B_3 f(x_0)$ an, und bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Konvexkombinationen. (2)

b) Wie viele Konvexkombinationen sind nötig, um mit dem gleichen Verfahren ein Bernstein–Polynom $B_n f$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle x_0 auszuwerten? (2)

Aufgabe 6: Implementierung des Algorithmus von de Casteljau

Entwickeln Sie eine Funktion `casteljau(n, c, x)`, die das Bézier–Bernstein–Polynom $B_n := \sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}_j B_j^n$ mit den Koeffizienten $(\mathbf{c}_j)_{j=0}^n$ mit Hilfe des Algorithmus von de Casteljau an der Stelle `x` auswertet. Zeichnen Sie anschließend eine polynomiale Kurve Ihrer Wahl zusammen mit dem Polygonzug durch die von Ihnen verwendeten Kontrollpunkte in ein gemeinsames Koordinatensystem. Überprüfen Sie die Endpunkt– und Konvexe–Hülle–Eigenschaft der Bézierdarstellung. (5)

Aufgabe 7: Basis–Eigenschaft der Bernstein–Polynome

Zeigen Sie, dass jedes Polynom $\mathbf{P} \in \Pi_n$ eine Basisdarstellung $\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j B_j^n(t)$ besitzt. (3)

Aufgabe 8: Darstellung der Ableitung einer polynomialen Kurve

Beweisen Sie Lemma 2.14 der Vorlesung: Es sei $\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \mathbf{b}_0^n(t)$ eine polynomiale Kurve in Bézierform. Dann gilt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell} \mathbf{P}(t) = \frac{n!}{(n-\ell)!} \Delta^{\ell} \mathbf{b}_0^{n-\ell}(t), \quad t \in [0,1].$$

(3)