Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke
Manuel Werner

WS 2007/2008

6. Übungsblatt zur Vorlesung Computer Aided Geometric Design

Abgabe: Donnerstag, 24.01.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 16: *Eigenschaften der dividierten Differenzen*

Weisen Sie die folgenden Eigenschaften der dividierten Differenzen nach.

i) $[\theta_0, \ldots, \theta_n]P = 0$ für alle $P \in \Pi_{n-1}$;

ii) $[\theta_0, \ldots, \theta_n]f = [\theta_{\pi(0)}, \ldots, \theta_{\pi(n)}]f$ für alle $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, wobei $\pi : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$ eine beliebige Permutation ist, d.h. die n-te dividierte Differenz ist unabhängig von der Reihenfolge der involvierten Koeffizienten;

iii) für $\theta_i \neq \theta_j$ gilt die folgende Rekursionsformel

$$[\theta_0, \ldots, \theta_n]f = \frac{[\theta_0, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots \theta_n]f - [\theta_0, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots \theta_n]f}{\theta_j - \theta_i};$$

iv) für jedes $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ gilt

$$[\theta_0, \ldots, \theta_n]f = \int_{\Sigma_n} f^{(n)}(\lambda_0\theta_0 + \cdots + \lambda_n\theta_n)\mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_n,$$

wobei $\Sigma_n := \{(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)^\top : \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \ , \ \lambda_j \geq 0 \text{ für } j = 0, \ldots, n\}$ der n-*dimensionale Standardsimplex* ist;

v) $[\underbrace{\theta_0, \ldots, \theta_0}_{n+1}]f = \dfrac{f^{(n)}(\theta_0)}{n!}$;

vi) $[\theta_0, \ldots, \theta_n]f = \dfrac{f^{(n)}(\theta)}{n!}$ für ein $\theta \in [\theta_0, \ldots, \theta_n]$ (konvexe Hülle der θ_i);

vii) $[\theta_0, \ldots, \theta_n](fg) = \displaystyle\sum_{j=0}^n ([\theta_0, \ldots, \theta_j]f)[\theta_j, \ldots, \theta_n]g$ (Leibniz-Regel);

viii) für $\theta_0 < \cdots < \theta_n$:

$$[\theta_0, \ldots, \theta_n]f = \sum_{j=0}^n \frac{f(\theta_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (\theta_j - \theta_i)};$$

(1+1+3+3+1+2+3+2)

Bitte wenden!

Aufgabe 17: *Eigenschaften der B-Splines*

Weisen Sie die folgenden Eigenschaften der B-Splines nach.

i) $\operatorname{supp} N_{i,k} \subseteq [\theta_i, \theta_{i+k}]$ (lokaler Träger);

ii) $N_{i,k}$ ist ein stückweises Polynom vom Grad höchstens $k-1$. Genauer: ist $\theta_{i-1} < \theta_i = \cdots = \theta_{i+d} < \theta_{i+d+1}$, so gilt

$$N_{i,k} \in \mathcal{C}^{k-2-d}(\theta_{i-1}, \theta_{i+d+1}).$$

Speziell ist $N_{i,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})$, falls $\theta_{i-1} < \theta_i < \theta_{i+1}$.

(1+4)