Merkblatt zur Numerik von Anfangswertproblemen

Einschrittverfahren (ESV)

$$\begin{cases} u_{j+1} & = & u_j + h_j \phi(t_j, t_{j+1}, u_j, u_{j+1}, h_j) \\ & = & u_j + h_j \varphi(t_j, u_j, h_j) \\ u_0 & = & y_0 \end{cases}$$

$$\overset{k=1}{\subset}$$

Mehr-/k-Schrittverfahren (MSV)
(Darstellung nur für h konstant)

$$\begin{cases} \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell u_{j+\ell} & = & h\phi(t_j, \dots, t_{j+k}, u_j, \dots, u_{j+k}, h) \\ & \overset{\text{lin.}}{=} & \sum_{\ell=0}^{k} \beta_\ell f(t_{j+\ell}, u_{j+\ell}) \\ u_0 & = & y_0 \\ u_1, \dots, u_{k-1} & & \text{mit Anlaufrechnung (z.B. ESV)} \end{cases}$$

Konsistenz, Stabilität, Konvergenz

	ESV	MSV
Konsistenzfehler/ *lokaler* Diskretisierungsfehler:	$\tau(t_j, h_j) \quad = \quad \frac{1}{h_j}\ y(t_j + h_j) - u_{j+1}$ (alternativ: $\tau(h_j)$)	$\tau(t_j, kh) \quad = \quad \frac{1}{h}\ y(t_j + kh) - u_{j+k}$
Konsistenz	$\max_j\ \tau(t_j, h)\ = o(1)$ für $h \to 0$	$\max_j\ \tau(t_j, kh)\ = o(1)$ für $h \to 0$
Konsistenz*ordnung* p	$\tau(h)\ = \mathcal{O}(h^{p+1})$ für $h \to 0$	$\max_j\ \tau(t_j, h)\ = \mathcal{O}(h^{p+1})$ für $h \to 0$, $\lVert y(t_j) - u_j \rVert = \mathcal{O}(h^{p+1})$ für $j \le k-1$, $h \to 0$
Konvergenz (auf endl. Gitter $T_h = \{t_0, \dots, t_m\}$)	$\max_{t \in T_h}\ y(t) - u_h(t)\ = o(1)$ für $h \to 0$, Anfangswertstörung $u_j = u_j(\varepsilon)$ um $o(1)$ erlaubt	
Konvergenz*ordnung* p	$\max_{t \in T_h}\ y(t) - u_h(t)\ = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \to 0$, Anfangswertstörung $u_j = u_j(\varepsilon)$ um $\mathcal{O}(h^p)$ erlaubt	
Konsistenz(-ordnung) $\overset{?}{\Rightarrow}$ Konvergenz(-ordnung)	gilt bereits unter schwachen Voraussetzungen (Lipschitz-stetiges φ, siehe diskrete Gronwall-Ungleichung)	gilt nur unter starken Einschränkungen (0-Stabilität), zudem numerische Schwierigkeiten bei sog. schwacher Stabilität

Konstruktionsprinzipien konsistenter und konvergenter Verfahren

- i.A. via genügend exakter Quadraturformel zu $y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} f(s, y(s))\, ds$
  Beispiele: Eulers PZV, impliziter Euler, implizite/explizite Mittelpunktsregel (jeweils 1-Punkt-Quadraturformel), implizite Trapezregel (Trapezregel), Standard-RK-Verfahren (Simpson-Regel), Adams-Bashforth / Nyström / Adams-Moulton / Milne-Simpson ($\sim$ ähnlich Newton-Cotes-Formeln), ...
- Runge-Kutta-Verfahren (RK): Nachbilden der Taylorentwicklung von $f(\cdot, y(\cdot))$ mit Linearkombination verschachtelter Funktionsauswertungen, Koeffizientenvergleich hierzu liefert (nichtlin.) Bedingungs-Gleichungssystem für die RK-Koeffn.; Butcher-Schema als verkürzte Schreibweise
- MSV: Konsistenzordnung liefert (lin.) Bedingungs-Gleichungssystem für die Koeffizienten des ersten und zweiten charakteristischen Polynoms $\rho(z) = \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell z^\ell$ bzw. $\sigma(z) = \sum_{\ell=0}^{k} \beta_\ell z^\ell$, (Null-)Stabilitätsbedingung an ρ für Konvergenz

Effizienzsteigerung

- Verwendung von Verfahren höherer Ordnung: geringere Schrittzahl bei gleicher Genauigkeit, wirkt u.a. gegen Rundungsfehlereinfluss
- Schrittweitensteuerung zur lokalen Anpassung an f bzw. y; erfordert Fehlerschätzung pro Zeitschritt (z.B. durch Differenz von Verfahren verschiedener Ordnung (s.a. Extrapolation, eingebettete RK-Verfahren) oder Differenz von Ergebnissen eines Verfahrens bei verschiedenen Teilschrittweiten)
- Verwendung impliziter Verfahren bei *steifen* AWPen: größere Schrittweiten stabil rechenbar (auf Kosten vergleichsweise geringfügig höheren Aufwands pro Schritt)

Gewinnung von (ES-/MS-)Verfahren höherer Ordnung

(u.a.) durch	Kostenfaktoren, Einschränkungen
Erhöhung der Stufenzahl m	• $\#\{f$-Auswertungen$\}$ wächst (mind. linear in m) • f-Auswertungen werden nach Zeitschritt verworfen (unökonomisch) • Konstruktion schwierig: nichtlin. Gl.-System für RK-Koeffn. (i.A. überbestimmt, Größe wächst zudem exponentiell) • bei impliziten RK-Verfahren i.A. 1 nichtlineares Gleichungssystem pro Zeitschritt • Butcher-Schranke: $m \ge m_0(p)$, i.A. $m \ge p+3$ (für $p \le 8$ besser, s. Vorlesg.)
Erhöhung der Schrittzahl k	• parasitäre Wurzeln (von ρ), Instabilitäts–/ Konvergenzproblem • erschwerte Schrittweitensteuerung (Effizienzverlust) • Anlaufrechnung mit ESV genügend hoher Ordnung notwendig • 1. Dahlquist-Schranke: Ordng. $p \le p_0(k)$ für lin. stabile MSV, i.w. $p \le k+2$ • 2. Dahlquist-Schranke: Ordng. $p \le 2$ für lin. A-stabile MSV
(Richardson-) Extrapolation	• erfordert asympt. Entwicklung des globalen Diskr.-Fehlers nach h • $\#\{f$-Auswertungen$\}$ wächst (mind. quadratisch in Extr.-Stufenzahl)
Meth. d. Taylor–Entwicklung	• erfordert numer. Approximation von $\frac{d^k}{dt^k} f(t, y(t))$ mit genügend hoher Ordnung, Instabilitätsgefahr
Mischung verschiedener Verfahren (z.B. Cauchys ϑ-Methode)	• Vererbungsproblem

Übersicht einiger ESV/MSV

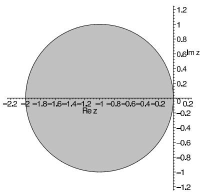
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">MSV</th></tr>
<tr><th>k</th><th>lineare MSV</th><th>allg. MSV</th></tr>
<tr><td>1</td><td>

genau die Verfahren aus Cauchys ϑ-Methode, z.B. für $\vartheta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

Eulers PZV

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

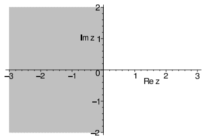
$p = 1$



impl. Trapezregel

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

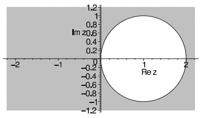
$p = 2$



impl. Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$p = 1$



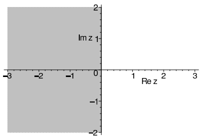
</td><td>

z.B. andere, höherstufige RK-Verfahren; einige wenige Beispiele:

impl. Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

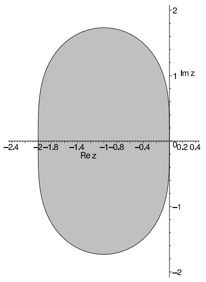
$p = 2$



verbessertes PZV (Runge)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

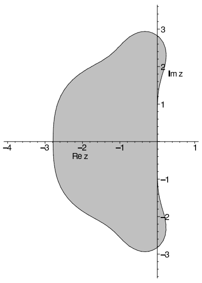
$p = 2$



Standard-RK-Verf.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

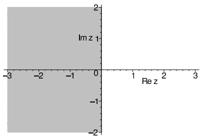
$p = 4$



impl. RK-Verf. in Gauß-Form

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{(3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{2}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$p = 4$



</td></tr>
<tr><td>> 1</td><td>

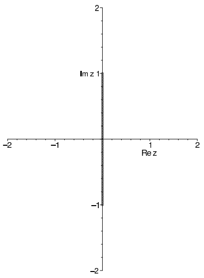
$k = 2$: expl. Mittelpunktsregel

$\rho(z) = z^2 - 1$

$\sigma(z) = 2z$

$p = 2$

0-stabil, schwach stabil



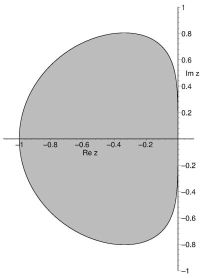
(Adams-)Verfahren vom Typ (r, ℓ), z.B.:
(alle 0-stabil und absolut stabil)

Adams-Bashforth
$k = 2$, $(r, \ell) = (1, 0)$

$\rho(z) = z^2 - z$

$\sigma(z) = \frac{1}{2}(3z - 1)$

$p = 2$

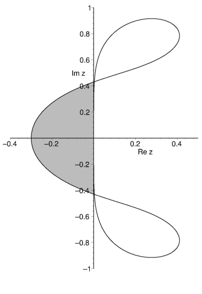


Adams-Bashforth
$k = 4$, $(r, \ell) = (3, 0)$

$\rho(z) = z^4 - z^3$

$$\sigma(z) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 55 \\ -59 \\ 37 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p = 4$

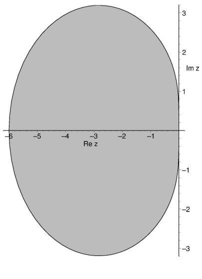


Adams-Moulton
$k = 2$, $(r, \ell) = (2, 1)$

$\rho(z) = z^2 - z$

$$\sigma(z) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^2 \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p = 3$



</td><td>

Mehrstufen-Mehrschrittverfahren

- z.B. Prädiktor-Korrektor-Verfahren
- → *general linear methods*

(nicht in der Vorlesung behandelt)

</td></tr>
</table>