

Übungen zur NUMERIK II - ENDLICHDIMENSIONALE PROBLEME
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 5 Zur Konvergenz der Vektor-Iteration wurde in der Vorlesung vorausgesetzt, daß (3) nur ein einziger Eigenwert von maximalem Betrag existiert. Aber schon bei reellen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, wenn ein dominantes, konjugiert komplexes Paar von Eigenwerten vorliegt. Dazu wird nun der Fall

$$\lambda_1 \notin \mathbb{R}, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}, Ax^{(j)} = \lambda_j x^{(j)}, j = 1, 2,$$

mit $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots$ betrachtet.

a) Zunächst sei $z^{(0)} = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $v^{(k)} := A^k z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie hierfür das Verhalten von $\|v^{(k)}\|_2$ in Abhängigkeit von k an.

b) Zeigen Sie für den in a) betrachteten Fall, dass gilt

$$v^{(k+2)} = b_1 v^{(k+1)} + b_0 v^{(k)}, k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

mit reellen Konstanten b_i und geben sie diese an.

Anmerkung: In der praktischen Anwendung mit allgemeinem $z^{(0)}$ interpretiert man (1) als überbestimmtes Gleichungssystem für die Koeffizienten b_0, b_1 .

Aufgabe 6 Alle Eigenwerte λ_j von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien reell, $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < \lambda_1$. Zeigen Sie, (3) dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Vektor-Iteration mit $A - \lambda I$ gegen den zu λ_1 gehörenden Eigenvektor konvergiert und bestimmen Sie dasjenige λ , welches auf die schnellste Konvergenz führt.

Aufgabe 7 Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Inverse Iteration ausgerechnet im (3) Erfolgsfall unbrauchbar wird. Es werde daher jetzt der Fall betrachtet, dass im Gleichungssystem $(A - \lambda I)z = q$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $z, q \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, in der QR -Zerlegung $A - \lambda I = QR$ die Matrix R singular ist. Es sei etwa $r_{mm} = 0$ für ein $m \in \{1, \dots, n\}$ und $|r_{ii}| \geq 1/t > 0 \forall i \neq m$.

a) Konstruieren Sie aus dieser QR -Zerlegung einen nichttrivialen Vektor $x \in N(A - \lambda I)$.

b) In der Matrix R werde das verschwindende Diagonalelement durch eine kleine Zahl $0 < \varepsilon \ll 1$ ersetzt (evtl. aufgrund von Rundungsfehlern), $\tilde{R} := R + \varepsilon e^{(n)} e^{(n)\top}$. Zur Vereinfachung wurde $m = n$ angenommen. Zeigen Sie, dass dann für die Lösung von $Q\tilde{R}z = q$ gilt $z = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} x + y$ mit einem von ε unabhängigen $y \in \mathbb{C}^n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 Programmieren Sie das Verfahren der Inversen Iteration zur Berechnung einzelner Eigenwerte und Eigenvektoren für Hessenbergmatrizen. Dabei ist sowohl die Variante mit fester Matrix/Spektralverschiebung $A - \lambda I$, als auch die mit variabler, $A - \lambda^{(k-1)}I$, vorzusehen. Verwenden Sie zur Lösung der linearen Gleichungssysteme eine QR -Zerlegung. Diese soll jeweils mit so genannten *Givens-Rotationen* erzeugt werden. Dazu sind jeweils für $k = 1, \dots, n - 1$ die folgenden Rechnungen durchzuführen: (6*)

Wegen der Hessenbergform betrifft jeder Teilschritt (Elimination der Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen in einer Spalte) nur jeweils zwei Zeilen oder Spalten von A . Bei der QR -Zerlegung sind dies die Operationen

$$\begin{pmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+1,k} & \dots & a_{k+1,n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{kk} & * \dots & a_{kn} \\ 0 & * \dots & a_{k+1,n} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n - 1$$

mit $c_k := a_{kk}/r_k$, $s_k := a_{k+1,k}/r_k$, $r_k := \sqrt{a_{kk}^2 + a_{k+1,k}^2}$, und bei der Rückmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

Daher werden als Zusatzspeicher nur zwei Felder C, S der Länge $n - 1$ benötigt. Die Matrix Q muss dabei nicht aufgebaut werden.

Mit dem Startvektor $q_j^{(0)} = 1$, $j = 1, \dots, n$, ist so der dem Punkt $\lambda^{(0)} := 1.7$ nächstgelegene Eigenwert der Hessenbergmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -0.5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & -0.5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -0.5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Dieser beträgt $\tilde{\lambda} = 1.09329818593976$. Führen Sie insgesamt 10 Testläufe durch (in einer Schleife!), indem Sie jeweils nach $k_0 = 1, k_0 = 2, \dots, k_0 = 10$ Standard-Schritten mit Verschiebung $A - \lambda^{(0)}I$ auf das Verfahren mit Variabler Spektralverschiebung $A - \lambda^{(k-1)}I$ umschalten. Führen Sie für jede Wahl von k_0 so viele Iterationsschritte durch bis $|\lambda^{(k)} - \tilde{\lambda}| < 10^{-3}$ beträgt. Geben Sie für jede Wahl von k_0 den berechneten Eigenwert und Eigenvektor aus, sowie die Anzahl der benötigten Iterationsschritte. Welche Wahl von k_0 ist hier die beste?

Abgabe: Mittwoch, 04.11.09, vor der Vorlesung, **Programmieraufgabe** eine Woche später

Hinweis: Auf der Übungsseite

<http://www.mathematik.uni-marburg.de/~werner/courses/NumII.WiSe09/> stehen Java-Klassen für Matrizen und Vektoren zur Verfügung, die für die Programmieraufgabe verwendet werden dürfen.