Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 12 Nach dem Beweis von Satz 1.3.8 wird durch k Schritte des einfachen QR-Verfahrens eine QR-Zerlegung der Matrix A^k berechnet. Für welche Matrix berechnet das QR-Verfahren die QR-Zerlegung, wenn k Spektralverschiebungen $\lambda^{(j-1)}$, $j = 1, \dots, k$, verwendet werden? (2)

Aufgabe 13 a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Hessenbergmatrix und *nicht zerfallend* (d.h. $a_{i,i-1} \neq 0$, $i = 2, \dots, n$). Zeigen Sie, dass dann A ähnlich zu einer Hessenbergmatrix B mit $b_{i,i-1} = 1$, $i = 2, \dots, n$ ist. (3)

b) Zeigen Sie: Alle Eigenwerte einer nicht-zerfallenden Hessenbergmatrix besitzen geometrische Vielfachheit Eins.

Aufgabe 14 Gegeben seien die Matrizen (4)

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren für beide Matrizen.

b) Betrachten Sie den Vektor $x := (\xi, 1)^\top$, $\xi \in \mathbb{R}$, und die Werte der Rayleighquotienten $R_A(x)$ mit $\xi = -1 + \epsilon$, bzw. $R_B(x)$ mit $\xi = -1/2 + \epsilon$. Zeigen Sie, dass

$$R_A(x) + 1 = \frac{\epsilon(4\epsilon - 3)}{\epsilon^2/2 - \epsilon + 1} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{und} \quad R_B(x) + 1 = \frac{8\epsilon^2}{\epsilon^2 - \epsilon + \frac{5}{4}} = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus Teil a) und b) im Hinblick auf die Aussagen des Satzes 1.4.2 der Vorlesung.

Abgabe: Mittwoch, 18.11.09, vor der Vorlesung