Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 27 Die Matrix $T := B^\mathsf{T} B$ sei gegeben mit Hilfe der Bidiagonalmatrix (3)

$$B := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie sowohl einen QR-Schritt $T \mapsto H_2 H_1 T H_1 H_2 =: T_2$ bei der symmetrischen Matrix T aus, als auch die äquivalente Umformung $B \mapsto F_1 B H_1 G_2 =: B_2$ mit der Bidiagonalmatrix B (die letzte Linksmultiplikation F_2 spielt für das Folgende keine Rolle). Verifizieren Sie, dass tatsächlich gilt $T_2 = B_2^\mathsf{T} B_2$.

Aufgabe 28 Die Norm des Fehlers bei Richardson- (und Tschebyscheff-) Iteration kann durch die Norm eines Matrixpolynoms $p(A)$ abgeschätzt werden. Es sei nun $p \in \Pi_m$ ein Polynom vom Grad m. (3)

a) Zeigen Sie: Bei $A = XJX^{-1}$, mit regulärem X, gilt $p(A) = Xp(J)X^{-1}$ und daher in jeder Matrixnorm $\|p(A)\| \le \kappa(X)\|p(J)\|$.

b) Für einen Jordanblock $C(\lambda) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ der Größe q gilt $C(\lambda) = \lambda I + S$ mit

$$S = C(0) = \Big(s_{ij}\Big)_{i,j=1}^{q} = \Big(\delta_{i,j-1}\Big)_{i,j=1}^{q}.$$

δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol. Zeigen Sie damit $S^k = \Big(\delta_{i,j-k}\Big)_{i,j=1}^{q}$, $k = 0, 1, \ldots$, sowie

$$p(C(\lambda)) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{p^{(k)}(\lambda)}{k!} S^k \quad \text{und} \quad \|p(C(\lambda))\|_\infty \le \sum_{k=0}^{q-1} \frac{|p^{(k)}(\lambda)|}{k!}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 29 Bei der Richardson-Iteration $x^{(k)} := x^{(k-1)} + \omega_k(r - Ax^{(k-1)})$, $k \geq 1$, zur Lösung von $Ax = r$ werden die Parameter $\omega_k \neq 0$ so bestimmt, dass das Fehlerpolynom p_k in $x^{(k)} - z = p_k(A)(x^{(0)} - z)$ nach m Schritten optimal ist. Zeigen Sie (3)

a) dass für $k \leq m$ und $x^{(0)} = 0$ jede Iterierte die Darstellung $x^{(k)} = q_{k-1}(A)r$ besitzt mit Polynomen $q_{k-1} \in \Pi_{k-1}$.

b) die Rekursion $q_k(t) = \alpha_k + (1 - \beta_k t)q_{k-1}(t)$, $k = 1, \ldots, m$. Wie lauten die Koeffizienten α_k, β_k?

c) den Zusammenhang mit Hilfe der dividierten Differenz

$$-q_{k-1}(t) = p_k[t, 0] = \frac{p_k(t) - p_k(0)}{t - 0}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Abgabe: Mittwoch, 16.12.2009, vor der Vorlesung