

Übungen zur NUMERIK II - ENDLICHDIMENSIONALE PROBLEME
9. Aufgabenblatt

Aufgabe 30 Zeigen Sie, dass für die in (2.1.17) definierten Parameter $\varrho_k = 2q \frac{T_k(q)}{T_{k+1}(q)}$, $q = \frac{b+a}{b-a} > 1$, der Tschebyscheff-Iteration die Rekursionsformel

$$\varrho_{k+1} = \frac{1}{1 - \varrho_k/(4q^2)}, \quad \varrho_0 = 2,$$

gilt und dass diese Folge gegen einen Grenzwert konvergiert. Wie lautet dieser?

Aufgabe 31 Programmieren Sie die Tschebyscheff-Iteration zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = r$ mit der positiv definiten Matrix (6*)

$$A = (a_{|i-j|})_{i,j=1}^n, \quad a_j = 2^{1-j}, j = 0, \dots, n-1, \quad n := 20,$$

und der rechten Seite r , $r_j = 4/j$, $j = 1, \dots, n$. Als obere Eigenwertschranke kann $\ell_1 := \|A\|_\infty \leq 6$ verwendet werden.

a) Eine Schätzung ℓ_n für den kleinsten Eigenwert ist nach 10 einleitenden Relaxationsschritten mit $x^{(0)} = 0$ und $\omega = 1/\ell_1$ aus der Beziehung $\|d^{(10)}\|_2 / \|d^{(9)}\|_2 = 1 - \omega \ell_n \cong 1 - \omega \lambda_{\min}$ für die Defekte $d^{(k)} = r - Ax^{(k)}$, $k \geq 0$, zu berechnen.

b) Setzen Sie das Relaxationsverfahren mit neuem Parameter $\omega = 2/(\ell_1 + \ell_n)$ fort bis $\|d^{(k)}\|_2 \leq 10^{-8}$ gilt. Geben Sie die benötigte Anzahl von Iterationsschritten (ohne die 10 Startschritte) und die nach dem letzten Schritt berechnete euklidische Norm des Defekts aus.

c) Die Tschebyscheff-Iteration unterscheidet sich vom Relaxationsverfahren nur durch einen Extrapolationsschritt mit den Koeffizienten ϱ_k (Rekursion aus Aufgabe 30). Dieser kann, z.B., durch eine logische Variable TSCHEB eingeschaltet werden. Führen Sie zum Vergleich die Iteration nach den Startschritten in a) jetzt mit dem Tschebyscheff-Verfahren durch bis $\|d^{(k)}\|_2 \leq 10^{-8}$ gilt. Geben Sie wieder die benötigte Anzahl von Iterationsschritten (ohne die 10 Startschritte) und die nach dem letzten Schritt berechnete euklidische Norm des Defekts aus.

Abgabe, einschließlich Programmieraufgabe: Mittwoch, 13.01.2010, vor der Vorlesung.

Hinweis: Auf der Übungsseite

http://www.mathematik.uni-marburg.de/~werner/courses/NumII_WiSe09/ gibt es Tipps zur Bearbeitung dieses Aufgabenblatts.

WIR WÜNSCHEN FROHE WEIHNACHTEN UND EIN GLÜCKLICHES JAHR 2010!