

Übungen zur NUMERIK II - ENDLICHDIMENSIONALE PROBLEME  
Bonusblatt

**Aufgabe 38** Betrachten Sie die Matrix (3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ .  
b) Führen Sie die Vektor-Iteration beginnend mit  $z^{(0)} := (1, 0, 1)^T$  bis zur Berechnung der Näherung  $\lambda^{(4)}$  durch.

**Aufgabe 39** Zeigen Sie, dass man die ersten beiden QR-Schritte bei einer Matrix  $A$  als einen (4)  
einzigsten QR-Schritt mit der Matrix  $A^2$  interpretieren kann.

**Aufgabe 40** Die Eigenwerte der folgenden Matrix sind reell, (3)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie mit einem Satz der Vorlesung ein Intervall  $[\alpha, \beta]$ , in dem alle Eigenwerte von  $A$  liegen.  
b) Führen Sie mit der Obergrenze  $\beta$  als Parameter einen Schritt der Inversen Iteration mit Startvektor  $q^{(0)} := (1, 1)^T$  durch und geben Sie die zugehörige Eigenwertschätzung für  $A$  an.

**Aufgabe 41** a) Bestimmen Sie die Matrix  $A$ , deren Singulärwertzerlegung durch die Matrizen (3)

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 24 & & \\ & 12 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Erfüllen die Faktoren die Einschränkungen der Definition?

- b) Geben Sie die beste Rang-2-Approximation an diese Matrix  $A$  an, also die Matrix  $A_2$  mit  $\|A - A_2\|_2 = \min\{\|A - B\|_2 : \text{Rang}(B) = 2\}$ .

**Aufgabe 42** Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem  $Ax = r$  mit (4)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix liegen im Intervall  $[3, 6]$  und für die Lösung  $z$  gilt  $\|z\|_2 = 3$ .

a) Führen Sie bei diesem System mit Startvektor  $x^{(0)} := 0$  einen Zweierzyklus der Richardson-Iteration mit den Parametern  $\omega_1 = 2/7, \omega_2 = 2/11$  durch.

b) Bestimmen Sie durch Abschätzung des zur Iteration gehörigen Matrixpolynoms eine Schranke für den Fehler  $\|x^{(2)} - z\|_2$ .

**Aufgabe 43** Die Matrix  $U_{m+1} \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$  sei die Orthonormalbasis des Krylovraums (3)  
 $\mathcal{K}_{m+1}(A, q)$ , die durch  $m$  Schritte im Arnoldi-Verfahren erzeugt wird, es sei  $\|q\|_2 = 1$ . Zeigen Sie (für  $m = 2$ ), dass dann  $U_{m+1}$  auch der orthogonale Faktor einer QR-Zerlegung der Krylov-Basismatrix ist, mit einer oberen Dreiecksmatrix  $R$  also gilt

$$U_3 R = (q, Aq, A^2 q).$$

**Aufgabe 44** Betrachten Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit (3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

a) Berechnen Sie alle im Verlauf des CG-Verfahrens auftretenden Residuen  $r^{(k)}$ .

b) Geben Sie Parameter  $\lambda, \beta$  an, so dass  $(\|r^{(k)}\|_2)_{k \geq 0}$  nicht monoton fällt.

**Abgabe:** Mittwoch, 03.02.2010, vor der Klausur