Satz 3.1.6 (LR–Zerlegung): Zu $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$ existiert eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R mit

$$PA = LR. \tag{3.1.17}$$

Dabei kann L so gewählt werden, dass

$$|\ell_{i,j}| \leq 1, \quad 1 \leq i,j \leq n \tag{3.1.18}$$

sowie

$$\ell_{i,i} = 1, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.1.19}$$

Im Fall von (3.1.19) ist die Zerlegung (3.1.17) eindeutig.

Beweis: Setze $A^{(1)} := A$. Wir wählen $p \in \{1,\dots,n\}$ mit

$$|a_{p,1}^{(1)}| \geq |a_{i,1}^{(1)}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dann ist $a_{p,1}^{(1)} \neq 0$ wegen $\det A \neq 0$. Sei $\tau_1 \in S_n$ diejenige Transposition, die 1 mit p vertauscht und

$$\widetilde{A}^{(1)} := P_{\tau_1} A^{(1)}.$$

Dann gilt

$$|\widetilde{a}_{1,1}^{(1)}| \geq |\widetilde{a}_{i,1}^{(1)}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Definiert man nun $\ell_{i,1} := \widetilde{a}_{i,1}^{(1)}/\widetilde{a}_{1,1}^{(1)}$ und L_1 wie bei der LR–Zerlegung ohne Pivotisierung, siehe (3.1.10), so gilt (3.1.18) und (3.1.19) und in

$$A^{(2)} := L_1 \widetilde{A}^{(1)} = L_1 P_{\tau_1} A$$

die Beziehung $a_{i,1}^{(2)} = 0$, $2 \leq i \leq n$. Induktiv definiert man die Transpositionsmatrizen P_{τ_k} und analog (3.1.10) die Matrizen L_k, so dass am Schluss

$$R := A^{(n)} = \underbrace{L_{n-1} P_{\tau_{n-1}} L_{n-2} P_{\tau_{n-2}} \cdots L_2 P_{\tau_2} L_1 P_{\tau_1}}_{=:M} A.$$

Kann man nun die Vormatrix M als Produkt $L^{-1}P$ identifizieren, so dass L untere Dreiecksmatrix und P Permutationsmatrix, so folgt direkt die Zerlegung (3.1.17). Hierzu schreibe künstlich

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= L_{n-1}(P_{\tau_{n-1}} L_{n-2} P_{\tau_{n-1}}^{-1}) \cdots (P_{\tau_{n-1}} \cdots P_{\tau_2}) L_1 (P_{\tau_{n-1}} \cdots P_{\tau_2})^{-1} (P_{\tau_{n-1}} \cdots P_{\tau_1}) A \\ &= L_{n-1} P_{\pi_{n-2}} L_{n-2} P_{\pi_{n-2}}^{-1} \cdots P_{\pi_1} L_1 P_{\pi_1}^{-1} P_{\pi_0} A, \end{aligned}$$

wobei $\pi_k := \tau_{n-1} \circ \cdots \circ \tau_{k+1}$. Die Permutation π_k lässt also nach Konstruktion die Zahlen $1,\dots,k$ unverändert und wirkt nichttrivial nur auf den Zahlen $k+1,\dots,n$. Ist τ nun genau eine solche Permutation, so gilt wegen $(P_\tau)_{i,j} = \delta_{i,\tau(j)}$ zunächst

$$(P_\tau L_k)_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} \delta_{i,\tau(m)} (L_k)_{m,j} = (L_k)_{\tau^{-1}(i),j}$$

und damit

$$(P_\tau L_k P_\tau^{-1})_{i,j} = (P_\tau L_k P_\tau^\top)_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} (P_\tau L_k)_{i,m} (P_\tau^\top)_{m,j} = \sum_{m=1}^{n} (L_k)_{\tau^{-1}(i),m} \delta_{j,\tau(m)} = (L_k)_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(j)}.$$

Die Struktur von $P_\tau L_k P_\tau^{-1}$ lässt sich dann durch eine geeignete Fallunterscheidung untersuchen. Betrachte zunächst den Fall $\boxed{j \leq k}$. Hier ist $\tau^{-1}(j) = j$, also $(P_\tau L_k P_\tau^{-1})_{i,j} = (L_k)_{\tau^{-1}(i),j}$. Für $1 \leq i \leq k$ folgt $\tau^{-1}(i) = i$ und $(P_\tau L_k P_\tau^{-1})_{i,j} = (L_k)_{i,j} = \delta_{i,j}$. Für $i \geq k+1$ ist dagegen $\tau^{-1}(i) \geq k+1$, also

$$(P_\tau L_k P_\tau^{-1})_{i,j} = (L_k)_{\tau^{-1}(i),j} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{cases} 0 & ,\ 1 \leq j \leq k-1 \\ -\ell_{\tau^{-1}(i),k} & ,\ j = k \end{cases}.$$

Betrachte dann den Fall $\boxed{j \geq k+1}$. Hier ist $\tau^{-1}(j) \geq k+1$. Für $1 \leq i \leq k$ ist $\tau^{-1}(i) = i$ und $(P_\tau L_k P_\tau^{-1})_{i,j} = (L_k)_{i,\tau^{-1}(j)} = 0$. Für $i \geq k+1$ ist $\tau^{-1}(i) \geq k+1$, also

$$(P_\tau L_k P_\tau^{-1})_{i,j} = (L_k)_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(j)} = \delta_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(j)} = \delta_{i,j}.$$

Insgesamt hat demnach $P_\tau L_k P_\tau^{-1}$ genau die gleiche Struktur wie L_k:

$$P_\tau L_k P_\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\ell_{\tau^{-1}(k+1),k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -\ell_{\tau^{-1}(n),k} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $\pi_{n-1} := \mathrm{id}$ und $\widehat{L}_k := P_{\pi_k} L_k P_{\pi_k}^{-1}$ für $1 \leq k \leq n-1$, so folgt

$$\widehat{L}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \ell_{\pi_k^{-1}(k+1),k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & \ell_{\pi_k^{-1}(n),k} & & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$L := \widehat{L}_1^{-1} \cdots \widehat{L}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \ell_{\pi_1^{-1}(2),1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{\pi_1^{-1}(n),1} & \cdots & \ell_{\pi_{n-1}^{-1}(n),n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $LR = P_{\pi_0} A$ und damit (3.1.17). Nach Konstruktion ist (3.1.18) und (3.1.19) erfüllt.
Zur Eindeutigkeit: Falls $L_1 R_1 = L_2 R_2$ mit (3.1.19), so ist $R_1 R_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$ eine Diagonalmatrix mit

$$(L_1^{-1} L_2)_{i,i} = (L_1^{-1})_{i,i} (L_2)_{i,i} = 1,$$

also $L_1^{-1} L_2 = I$ und damit $R_1 = R_2$. $\square$