Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke   Manuel Werner

SoSe 2008

2. Übungsblatt zur Numerik I

Abgabe: Dienstag, 22.04.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 4: *p-Normen*

Die p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Zeigen Sie für die zugeordneten Matrixnormen

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

die folgenden Aussagen, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times u}$:

i) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$

ii) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

iii) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

iv) $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$

(8)

Aufgabe 5: *Frobenius-Norm*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Beweisen Sie:

i) $\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$ ist eine Matrixnorm, für die gilt $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.

ii) Für $n > 1$ ist $\|\cdot\|_F$ nicht die durch die euklidische Vektornorm $\|\cdot\|_2$ induzierte Matrixnorm.

(6+1)

Aufgabe 6: *Kondition stetig differenzierbarer Funktionen*

Sei A offen und $f : \mathbb{R}^n \supset A \to B \subset \mathbb{R}^m$ einmal stetig differenzierbar.
Beweisen Sie Bemerkung 2.3.5 der Vorlesung, dass

$$\mathcal{K}(x) = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \|Df(x)\|, \quad \text{für alle } x \in A.$$

(6)