

3. Übungsblatt zur Numerik I

Abgabe: Dienstag, 29.04.2008, vor der Vorlesung,
Programmieraufgabe: eine Woche später

Aufgabe 7: *Rückwärtsanalyse*

Seien $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ Maschinenzahlen.

- i) Führen Sie eine Rückwärtsfehleranalyse zur Berechnung des Skalarprodukts $S_n = x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ durch. Dabei gelte die Vorschrift

$$S_0 := 0, \quad S_{i+1} := S_i + x_{i+1} y_{i+1}.$$

- ii) Bewerten Sie den Algorithmus hinsichtlich seiner Stabilität.

(6+3)

Aufgabe 8: *Spektralnorm*

Der *Spektralradius* von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A\}$.
Zeigen Sie:

i) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$ (Hinweis: Pythagoras)

ii) $\rho(A) \leq \|A\|$ für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$.

(4+2)

Aufgabe 9: *Permutationsmatrizen*

Beweisen Sie Teil i) und ii) der Bemerkung 3.1.5 der Vorlesung:

Die Abbildung $h : \mathcal{S}_n \rightarrow O(n)$, $\pi \mapsto P_\pi = (e^{\pi(1)}, \dots, e^{\pi(n)})$ ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.

(3)

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 10

Für den Umfang U_n eines dem Kreis $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = \frac{1}{2}\}$ einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecks gilt $U_n = n \sin \frac{\pi}{n}$. Aufgrund des Taylor-Restglieds gilt $|\sin(h) - h| \leq \frac{1}{6}h^3 + \mathcal{O}(h^5)$ für $h > 0$, also

$$|U_n - \pi| = n \left| \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) - \frac{\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi^3}{6n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}),$$

was eine schnelle Konvergenz von $A_n := U_{2^n}$ gegen π erwarten lässt. Implementieren Sie die folgenden beiden Varianten zur Berechnung von A_n und geben Sie jeweils $|A_n - \pi|$ aus, $n = 2, \dots, 30$. Woher kommt das unterschiedliche tatsächliche Fehlerverhalten?

$$\text{i) } A_2 = 2\sqrt{2}, \quad A_{n+1} = 2^n \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (A_n/2^n)^2})}$$

$$\text{ii) } A_2 = 2\sqrt{2}, \quad A_{n+1} = 2^n \sqrt{\frac{2(A_n/2^n)^2}{1 + \sqrt{1 - (A_n/2^n)^2}}}$$

Die beiden Rekursionen müssen nicht hergeleitet werden.

(10)

Hinweise:

- Kommentieren Sie bitte Ihre Programme stets ausführlich.
- Bitte geben Sie eine ausgedruckte Version Ihrer Programme ab und senden Sie diese auch per E-Mail an Ihren Tutor.