Fachbereich Mathematik und Informatik SoSe 2008
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Manuel Werner

4. Übungsblatt zur Numerik I

Abgabe: Dienstag, 13.05.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 11 *LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung*

Berechnen Sie die eindeutig bestimmte LR-Zerlegung aus Satz 3.1.6 der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2.1 & -1.1 & 1.7 \\ 1 & 1.5 & -3 & 0.5 \\ -2 & 3 & 1 & 5.5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie also die Permutationsmatrix P und die Matrizen L und R, so dass $PA = LR$, mit $\ell_{i,i} = 1$ und $|\ell_{i,j}| \leq 1$, $i, j = 1, \ldots, 4$. (5)

Aufgabe 12 *LR-Zerlegung streng diagonaldominanter Matrizen*

Zeigen Sie: Wenn $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ streng diagonaldominant ist, d.h. falls gilt

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{k\neq i\\ k=1}}^{n} |a_{i,k}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

dann besitzt A eine LR-Zerlegung. (6)

Aufgabe 13 *Rationale Cholesky-Zerlegung*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch positiv definit. Die spezielle Form der LR-Zerlegung $A = LDL^*$ aus Satz 3.1.10 nennt man auch *rationale Cholesky-Zerlegung*, da bei Ihrer Berechnung keine Quadratwurzeln gezogen werden müssen, also nur rationale Operationen benötigt werden.
Geben Sie ein zu Algorithmus 3.2.4 analoges Verfahren zur Berechnung von $\tilde{L} := LD$ und L an, und weisen Sie nach, dass die Anzahl der benötigten Multiplikationen/Divisionen von der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{6}\right)$ ist. (6)

Aufgabe 14 *Schur-Komplement*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär mit der LR-Zerlegung $A = LR$ und betrachte für $b, c \in \mathbb{R}^n$ und $\delta \in \mathbb{R}$ die Blockmatrix

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ c^\top & \delta \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

i) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung $\widehat{A} = \widehat{L}\widehat{R}$, wobei $\widehat{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ z^\top & 1 \end{pmatrix}$ mit geeignetem $z \in \mathbb{R}^n$.

ii) Zeigen Sie, dass $\widehat{A}$ genau dann regulär ist, wenn das *Schur-Komplement* $\delta - c^\top A^{-1} b \neq 0$ ist.

iii) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der *Standardmatrix*

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$ (2+1+4)

Programmieraufgabe 15

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spaltenpivotisierung.

Stellen Sie anschließend für $n = 2, 4, 8$ die *Hilbertmatrix* $H_n = (h_{i,j})_{i,j=1}^n$ auf, wobei

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Berechnen Sie danach eine obere Schranke für die Konditionszahl $\mathcal{K}_2(H_n) = \|H_n\|_2 \|H_n^{-1}\|_2$, $n = 2, 4, 8$. Berechnen Sie hierfür die Spalten $h^{(j)}$ der inversen Matrix $H_n^{-1} = (h^{(1)}, \ldots, h^{(n)})$ durch Lösung der Gleichungsysteme $H_n h^{(j)} = e^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, und anschließend die Frobenius-Normen von H_n und H_n^{-1} (vgl. Aufgabe 5 i)).

Führen Sie auch folgende Tests durch:

i) $H_n H_n^{-1} = I$.

ii) Stellen Sie jeweils die Matrizen L, R und P aus Satz 3.1.6 auf, und testen Sie, ob $PH_n = LR$ erfüllt ist.

Weitere Hinweise zu dieser Aufgabe gibt es auf der Vorlesungshomepage. Dort werden auch für alle Java-Programmierer Klassen für Matrizen und Vektoren bereitgestellt, die benutzt werden dürfen. (15)