Fachbereich Mathematik und Informatik SoSe 2008
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Manuel Werner

5. Übungsblatt zur Numerik I

Abgabe: Dienstag, 20.05.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 16: *Störungsanalyse*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Man betrachte das gestörte lineare Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$. Es sei x die Lösung des ungestörten Systems $Ax = b$. Für die Störung ΔA gelte die komponentenweise Schranke $|\Delta A| \leq \varepsilon |A|$ und $\|A^{-1}\Delta A\|_\infty < 1$. Beweisen Sie damit die Abschätzung

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\varepsilon}{1-q} \left\| |A^{-1}||A| \right\|_\infty , \quad q := \kappa_\infty(A)\varepsilon \ .$$

(6)

Aufgabe 17: *Householder–Verfahren*

Führen Sie von Hand das Householder-Verfahren zur Berechnung der Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

durch. (6)

Aufgabe 18: *Givens-Rotationen*

Berechnen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Givens-Rotationen aus Abschnitt 3.4.2 der Vorlesung. Es genügt dabei, die einzelnen Rotationsmatrizen sowie R anzugeben. Q muss nicht explizit berechnet werden.

(4)

Aufgabe 19: *Penrose-Axiome*

Beweisen Sie, dass eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ genau dann mit der Pseudoinversen A^+ von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ übereinstimmt, wenn die *Penrose-Axiome* erfüllt sind (Satz 4.2.1.1 der Vorlesung):

(P1) $(BA)^\top = BA$ (P3) $BAB = B$

(P2) $(AB)^\top = AB$ (P4) $ABA = A$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass B durch (P1) – (P4) eindeutig festgelegt ist und danach $By \in (\mathrm{Ker}A)^\perp$ sowie $\|ABy - y\|_2^2 = \min$, $y \in \mathbb{R}^m$. (6)