Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Manuel Werner SoSe 2008

8. Übungsblatt zur Numerik I

Abgabe: Dienstag, 17.06.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 29: *Eigenschaften der dividierten Differenzen*

Es seien $t_i \in [a,b]$, $i = 0, \ldots, n$, gegebene Stützstellen und f_i, $i = 0, \ldots, n$, Stützwerte. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der dividierten Differenzen $f[t_i, t_{i+1} \ldots, t_{i+k}]$:

i) Die dividierten Differenzen sind unabhängig von der Reihenfolge der Wertepaare (t_i, f_i).

ii) Sind die f_i Werte einer Funktion $f \in C^n[a,b]$, d.h. $t_i \in [a,b]$, $f_i = f(t_i)$, so gilt

$$f[t_i, \ldots, t_{i+k}] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi), \qquad (*)$$

für ein $\xi \in (\min_{j=i}^{i+k} t_j, \max_{j=i}^{i+k} t_j)$, $0 \le i \le i+k \le n$.

(1+3)

Aufgabe 30: *Hermite-Interpolation*

Im Vergleich zum Taylorpolynom eines bestimmten Grades besitzen Interpolationspolynome gleichen Grades bei Betrachtung eines ganzen Intervalls meist einen günstigeren weil gleichmäßigeren Fehlerverlauf. Bestimmen Sie

i) das Newton-Interpolationspolynom zur Funktion $f(x) = e^x$ und den Daten $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$, $f'(1)$,

ii) den Fehler dieses Polynoms und eine (gute) Schranke für sein Maximum im Intervall $[0,1]$. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem maximalen Fehler des Taylor-Polynoms um $x_0 = 0$ mit gleichem Grad.

Hinweis: Beachten Sie bitte die Erläuterungen zur Hermite-Interpolation auf der Rückseite. (3+3)

Aufgabe 31: *Kubische Interpolationssplines*

Man konstruiere einen natürlichen kubischen Interpolationsspline zu den Daten $(0,1)$, $(0.5, -0.5)$, $(1,2)$. (5)

Bitte wenden!

Aufgabe 32: *Gewichte einer interpolatorischen Quadraturformel*

Beweisen Sie Lemma 7.2.2 der Vorlesung. Die Gewichte $\alpha_{n,j}$ aus Formel (7.2.6) erfüllen

i) $\alpha_{n,j} = \alpha_{n,n-j}, \quad j = 0, \dots, n,$

ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} j^\ell = \frac{n^\ell}{\ell+1}, \quad \ell = 0, \dots, n.$

(3+2)

Hinweise zur Hermite-Interpolation:

Wegen der Beziehung $(*)$ liegt es Nahe, das Hermite-Interpolationsproblem aus Satz 6.1.16 durch Grenzübergang von mehreren Knoten in eine gemeinsame Stelle zu behandeln. Bekanntlich ist

$$\lim_{t_{i+1}\to t_i} f[t_i, t_{i+1}] = f'(t_i), \quad \text{für } f \in C^1[a,b].$$

Analoge Aussagen gelten in $(*)$, wenn mehrere Knoten zusammenrücken. Das Problem ist allerdings nur dann korrekt gestellt, wenn, wie in Satz 6.1.16 gefordert, an einer Stelle Funktions- und Ableitungswerte lückenlos vorgeschrieben sind. Es seien also für die Hermite-Interpolationsaufgabe bei einer genügend oft differenzierbaren Funktion f die folgenden Werte bekannt

$$f(t_i), f'(t_i), f''(t_i), \dots, f^{(s_i)}(t_i), \quad \text{wenn } t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+s_i}.$$

Mit diesen Ableitungen definieren wir gemäß $(*)$

$$f[\underbrace{t_i, \dots, t_i}_{(k+1)-\text{fach}}] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_i), \quad 0 \le k \le s_i.$$

Für solche Mehrfachknoten werden diese Werte in das Differenzentableau aus Algorithmus 6.1.10 eingetragen. Die noch fehlenden Differenzenquotienten berechnet man dann gemäß Algorithmus 6.1.10.

Beispiel: $n = 4$, $t_1 = t_2 = t_3$

$$\begin{array}{c|lllll}
t_0 & f_0 & & & & \\
t_1 & f_1 & f[t_0,t_1] & & & \\
t_1 & f_1 & f'(t_1) & f[t_0,t_1,t_1] & & \\
t_1 & f_1 & f'(t_1) & \frac{1}{2}f''(t_1) & f[t_0,t_1,t_1,t_1] & \\
t_4 & f_4 & f[t_1,t_4] & f[t_1,t_1,t_4] & f[t_1,t_1,t_1,t_4] & f[t_0,t_1,t_1,t_1,t_4]
\end{array}$$

Organisatorisches:

- **Klausurtermin: Dienstag, 24.06.2008, 11.00 Uhr, HG 116, Hörsaalgebäude. Dauer: 150 Minuten, ohne Hilfsmittel.**